



Universidade de Aveiro
2013

Departamento de Matemática

Margarida Alexandra Fidalgo
Nunes Lavrador Cunha Costa

Localização de monitores em
redes de telecomunicações



**Margarida Alexandra Fidalgo
Nunes Lavrador Cunha Costa**

**Localização de monitores em
redes de telecomunicações**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica da Doutora Cristina Requejo Agra, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho aos meus pais, ao meu marido e à minha filha.

o júri

Presidente

Professor Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra,
Professor Auxiliar, Universidade de Aveiro

Vogais

Professora Doutora Maria Margarida de Andrade Corte Real Goncalves,
Professora Auxiliar, Universidade Católica Portuguesa Porto

Professora Doutora Maria Cristina Saraiva Requejo Agra,
Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro

agradecimentos

Antes de mais, agradeço aos meus pais e marido pelo apoio na concretização desta satisfação pessoal.

Agradeço à minha orientadora, Professora Doutora Maria Cristina Saraiva Requejo Agra pelo seu apoio constante e sua disponibilidade demonstrada ao longo da elaboração desta dissertação.

Agradeço a todos aqueles que, em momentos menos bons, me deram força para continuar.

palavras-chave

Problema de cobertura, Programação linear inteira, Otimização, Monitorização de redes

resumo

Nesta tese estudamos o problema da monitorização de redes que consiste na melhor escolha de nós para a instalação de dispositivos que efetuem a monitorização da rede.

Começamos por considerar a versão na qual os caminhos de fluxo da rede são conhecidos. Neste caso o problema pode ser visto como um problema de cobertura no qual temos de cobrir todos os caminhos da rede por nós, que correspondem à localização dos dispositivos de monitorização. São também consideradas duas variantes do problema. Uma variante impõe um limite na capacidade de monitorização de cada dispositivo. Outra variante considera antes uma monitorização da quantidade de fluxo da rede (em vez dos caminhos). Apresentamos uma formulação em programação linear inteira para cada variante e um estudo computacional onde os vários parâmetros do problema variam. Nomeadamente efetuamos a variação do número de caminhos, do número de nós e dos custos de instalação dos monitores. Usando o software Xpress obtemos soluções que nos permitem avaliar a quantidade de dispositivos necessários em função do número de caminhos ou quantidade de fluxo da rede. Apresentamos conclusões tendo em conta o tempo computacional e a qualidade da solução obtida através das relaxações lineares dos modelos apresentados.

No final consideramos a versão na qual os caminhos efetuados pelo fluxo na rede não são conhecidos. Apresentamos uma formulação em programação linear inteira para o problema e, usando o software Xpress, obtemos soluções para alguns exemplos.

Key words

Set covering problem, Integer linear programming, Optimization, Network monitoring

abstract

In this thesis we study the network monitoring problem which is the best selection of nodes for locating monitoring devices on the network.

We begin by considering the version in which the flow paths of the network are known. In this case the problem can be seen as a set covering problem in which we cover all the paths of the network with nodes, which correspond to the location of the monitoring devices. Two variants of the problem are also considered. A variant imposes a limit on the capacity of each monitoring device. Another considers the monitoring of the amount of flow of the network (instead of paths). We present a integer linear programming formulation for each variant and a study where various computational parameters of the problem varies. In particular we make the change in the number of paths, the number of nodes and the installation costs of the monitors. Using the software Xpress, the obtained solutions allow us to assess the number of devices needed, the number of routes or amount of network flow. We present conclusions regarding the computational time and the quality of the solution obtained via linear relaxations of the presented models.

At the end we consider the version in which the flow paths in the network is not known. We present an integer linear programming formulation for the problem and, using the Xpress software, we obtain solutions to some examples.

Índice

1-Introdução.....	9
2 – Alguns Conceitos	13
3 - Problema de cobertura e partição	23
3.1. Problema de cobertura simples	23
Formulação (PC) – Problema de cobertura.....	24
Formulação (PP) – Problema de partição.....	25
3.2. Problema de cobertura múltiplo	26
Formulação do (PCM) - Problema de cobertura múltiplo.....	26
3.3.- Problema de cobertura generalizado	27
Formulação (PCG) – Problema de cobertura generalizado.....	28
3.4. Problema de localização de concentradores	29
Formulação (PLC) – Problema de localização de concentradores	30
3.5.- Problema do circuito de cobertura	30
Formulação (PCC) – Problema do circuito de cobertura.....	33
4 - Dimensionamento e localização de monitores em redes de telecomunicações.....	35
Formulação (MRT1) – Monitorização de redes de telecomunicações.....	37
Formulação (MRT2) – Monitorização de redes de telecomunicações.....	40
Formulação (MRT3) – Monitorização de redes de telecomunicações.....	43
5 - Resultados computacionais	47
6- Problema de localização de Monitores.....	117
Localização de monitores nos nós	118
Formulação (LM) – Localização de monitores	119
7- Conclusões	125
8 - Bibliografia	129

Índice de Gráficos

Gráfico 1- Tempos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	52
Gráfico 2 - Valores ótimos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	52
Gráfico 3 – Tempos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50.....	53
Gráfico 4 - Valores ótimos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	53
Gráfico 5 – Tempos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50.....	54
Gráfico 6 – Valores ótimos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	54
Gráfico 7 – Tempos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50.....	55
Gráfico 8 – Valores ótimos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	55
Gráfico 9 - Tempos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150.....	56
Gráfico 10 - Valores ótimos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	56
Gráfico 11 - Tempos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150.....	57
Gráfico 12 - Valores ótimos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	57
Gráfico 13 - Tempos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200	58
Gráfico 14 - Valores ótimos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	58
Gráfico 15 - Tempos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	59
Gráfico 16 - Valores ótimos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	59
Gráfico 17 - Tempos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600	60
Gráfico 18- Valores ótimos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600	60
Gráfico 19 - Tempos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50.....	63
Gráfico 20 – Valores ótimos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	63
Gráfico 21 - Tempos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50.....	64
Gráfico 22 - Valores ótimos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	64
Gráfico 23 - Tempos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50.....	65
Gráfico 24 - Valores ótimos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	65
Gráfico 25 - Tempos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50.....	66
Gráfico 26 - Valores ótimos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	66
Gráfico 27 - Tempos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150.....	67
Gráfico 28 - Valores ótimos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	67
Gráfico 29 - Tempos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150.....	68
Gráfico 30 - Valores ótimos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	68
Gráfico 31 - Tempos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200	69
Gráfico 32 - Valores ótimos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200	69
Gráfico 33 - Tempos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	70
Gráfico 34 - Valores ótimos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	70
Gráfico 35 - Tempos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600	71
Gráfico 36 - Valores ótimos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	71
Gráfico 37 - Tempos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50.....	74
Gráfico 38- Valores ótimos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	74
Gráfico 39 - Tempos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50.....	75
Gráfico 40 - Valores ótimos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	75

Gráfico 41- Tempos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	76
Gráfico 42 - Valores ótimos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	76
Gráfico 43- Tempos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	77
Gráfico 44- Valores ótimos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	77
Gráfico 45 - Tempos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150.....	78
Gráfico 46- Valores ótimos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	78
Gráfico 47 - Tempos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150.....	79
Gráfico 48- Valores ótimos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	79
Gráfico 49- Tempos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200	80
Gráfico 50 - Valores ótimos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200	80
Gráfico 51 - Tempos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	81
Gráfico 52 - Valores ótimos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	81
Gráfico 53 - Tempos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600	82
Gráfico 54 - Valores ótimos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600	82
Gráfico 55- Tempos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	85
Gráfico 56- Valores ótimos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	85
Gráfico 57- Tempos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	86
Gráfico 58- Valores ótimos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	86
Gráfico 59- Tempos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	87
Gráfico 60- Valores ótimos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	87
Gráfico 61 - Tempos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50.....	88
Gráfico 62 - Valores ótimos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	88
Gráfico 63- Tempos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	89
Gráfico 64- Valores ótimos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	89
Gráfico 65 - Tempos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150.....	90
Gráfico 66 - Valores ótimos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	90
Gráfico 67- Tempos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200	91
Gráfico 68- Valores ótimos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200	91
Gráfico 69 - Tempos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	92
Gráfico 70 - Valores ótimos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	92
Gráfico 71 - Tempos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	93
Gráfico 72 - Valores ótimos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	93
Gráfico 73- Tempos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	95
Gráfico 74 - Valores ótimos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	95
Gráfico 75 - Tempos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50.....	96
Gráfico 76- Valores ótimos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	96
Gráfico 77- Tempos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	97
Gráfico 78- Valores ótimos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	97
Gráfico 79- Tempos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	98
Gráfico 80- Valores ótimos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	98
Gráfico 81 - Tempos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150.....	99
Gráfico 82- Valores ótimos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	99
Gráfico 83- Tempos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	100

Gráfico 84- Valores ótimos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	100
Gráfico 85 - Tempos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200	101
Gráfico 86 - Valores ótimos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200	101
Gráfico 87 - Tempos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	102
Gráfico 88 - Valores ótimos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	102
Gráfico 89- Tempos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600	103
Gráfico 90 - Valores ótimos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600	103
Gráfico 91 - Tempos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50.....	105
Gráfico 92- Valores ótimos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	105
Gráfico 93 - Tempos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50.....	106
Gráfico 94 - Valores ótimos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	106
Gráfico 95 - Tempos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50.....	107
Gráfico 96- Valores ótimos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	107
Gráfico 97- Tempos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	108
Gráfico 98- Valores ótimos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50	108
Gráfico 99- Tempos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	109
Gráfico 100 - Valores ótimos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	109
Gráfico 101 - Tempos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	110
Gráfico 102- Valores ótimos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150	110
Gráfico 103- Tempos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200	111
Gráfico 104 - Valores ótimos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200	111
Gráfico 105 - Tempos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	112
Gráfico 106 - Valores ótimos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350	112
Gráfico 107- Tempos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600	113
Gráfico 108 - Valores ótimos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600	113

Índice de Figuras

Figura 1- Grafo.....	15
Figura 3- Grafo Orientado	16
Figura 4– Circuito ou ciclo	16
Figura 2- Caminho	16
Figura 5- Caminho Hamiltoniano	17
Figura 6 - Matriz de adjacência do grafo G	17
Figura 7 – Matriz de incidência de grafo orientado	18
Figura 8 - Matriz de incidência de grafo não orientado.....	19
Figura 9- Matriz de incidência de caminhos.....	19
Figura 10 – Cobertura por vértices de um grafo	20
Figura 11 - Cobertura por arestas de um grafo G1 e respetiva matriz de incidência	21
Figura 12- Cobertura por arestas de um grafo G2 e respetiva matriz de incidência	21
Figura 13 – Partição do círculo em 5 partes. A1, A2,...A5	21
Figura 14 – Partição de conjunto de vértices.....	22
Figura 15 – Partição do conjunto das arestas	22
Figura 16 – Grafo com todos os arcos co peso 1 em que o sentido não é relevante	32
Figura 17 - Solução do problema PCC	32
Figura 18 – Grafo do MRT1 com 10 nós e 3 caminhos.....	39
Figura 19 – Exemplo de grafo do MRT2 com 10 nós e 3 caminhos	42
Figura 20 - Exemplo de grafo do MRT 3 com 10 nós e 3 caminhos	44

Índice de Tabelas

Tabela 1 – Resultados para 10 nós com custos fixos usando o MRT1	52
Tabela 2 - Resultados para 20 nós com custos fixos usando o MRT1.....	53
Tabela 3 - Resultados para 30 nós com custos fixos usando o MRT1.....	54
Tabela 4 - Resultados para 50 nós com custos fixos usando o MRT1.....	55
Tabela 5 - Resultados para 60 nós com custos fixos usando o MRT1.....	56
Tabela 6 - Resultados para 70 nós com custos fixos usando o MRT1.....	57
Tabela 7 - Resultados para 100 nós com custos fixos usando o MRT1.....	58
Tabela 8 - Resultados para 150 nós com custos fixos usando o MRT1.....	59
Tabela 9 - Resultados para 200 nós com custos fixos usando o MRT1.....	60
Tabela 10 - Resultados para 10 nós com custos variáveis usando o MRT1	63
Tabela 11 - Resultados para 20 nós com custos variáveis usando o MRT1	64
Tabela 12 - Resultados para 30 nós com custos variáveis usando o MRT1	65
Tabela 13 - Resultados para 50 nós com custos variáveis usando o MRT1	66
Tabela 14 - Resultados para 60 nós com custos variáveis usando o MRT1	67
Tabela 15 - Resultados para 70 nós com custos variáveis usando o MRT1	68
Tabela 16 - Resultados para 100 nós com custos variáveis usando o MRT1	69
Tabela 17 - Resultados para 150 nós com custos variáveis usando o MRT1	70
Tabela 18 - Resultados para 200 nós com custos variáveis usando o MRT1	71
Tabela 19 - Resultados para 10 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2	74
Tabela 20 - Resultados para 20 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2	75
Tabela 21 - Resultados para 30 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2	76
Tabela 22 - Resultados para 50 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2	77
Tabela 23 - Resultados para 60 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2	78
Tabela 24 - Resultados para 70 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2	79
Tabela 25 - Resultados para 100 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2	80
Tabela 26 - Resultados para 150 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2	81
Tabela 27 - Resultados para 200 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2	82
Tabela 28 - Resultados para 10 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2.....	85
Tabela 29 - Resultados para 20 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2.....	86
Tabela 30 - Resultados para 30 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2.....	87
Tabela 31 - Resultados para 50 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2.....	88
Tabela 32 - Resultados para 60 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2.....	89
Tabela 33 - Resultados para 70 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2.....	90
Tabela 34 - Resultados para 100 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2	91
Tabela 35 - Resultados para 150 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2	92
Tabela 36 - Resultados para 200 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2	93
Tabela 37 - Resultados para 10 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2.....	95
Tabela 38 - Resultados para 20 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2.....	96
Tabela 39 - Resultados para 30 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2.....	97
Tabela 40 - Resultados para 50 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2.....	98
Tabela 41 - Resultados para 60 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2.....	99

Tabela 42 - Resultados para 70 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2.....	100
Tabela 43 - Resultados para 100 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2.....	101
Tabela 44 - Resultados para 150 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2.....	102
Tabela 45 - Resultados para 200 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2.....	103
Tabela 46 - Resultados para 10 nós usando o MRT3	105
Tabela 47 - Resultados para 20 nós usando o MRT3	106
Tabela 48 - Resultados para 30 nós usando o MRT3	107
Tabela 49 - Resultados para 50 nós usando o MRT3	108
Tabela 50 - Resultados para 60 nós usando o MRT3	109
Tabela 51 - Resultados para 70 nós usando o MRT3	110
Tabela 52 - Resultados para 100 nós usando o MRT3	111
Tabela 53 - Resultados para 150 nós usando o MRT3	112
Tabela 54 - Resultados para 200 nós usando o MRT3	113

1-Introdução

A monitorização de redes de telecomunicações é uma tarefa que se vem afirmando como essencial no controlo do funcionamento de uma rede de telecomunicações. Torna-se, cada vez mais, fundamental efetuar averiguações frequentes acerca do funcionamento da rede para estabelecer o seu nível de desempenho e identificar locais de mau funcionamento. Para efetuar a monitorização de uma rede de telecomunicações há que instalar dispositivos (monitores) que permitam obter informações acerca do funcionamento da rede. Para promover uma eficiente monitorização da rede, é necessário determinar a melhor localização para tais dispositivos, bem como minimizar o número de dispositivos a instalar. Minimizar o número de dispositivos de monitorização instalados e determinar localizações estratégicas desses dispositivos são, portanto, questões críticas, e importantes, para desenvolver plataformas ótimas de monitorização de redes de telecomunicações.

A otimização da monitorização em redes de telecomunicações é considerada extremamente complexa. Normalmente estes problemas são de grande dimensão e a sua natureza combinatória requer o desenvolvimento de estratégias capazes de obterem soluções que, não sendo ótimas, sejam o mais próximo possível da solução ótima. Existem diversas abordagens para resolver complexos problemas combinatórios de otimização. São elas abordagens que utilizam modelos de programação matemática conjuntamente com técnicas específicas para a sua resolução e abordagens que utilizam técnicas heurísticas.

Numa área urbana, o congestionamento, a poluição e a deterioração da qualidade de vida deve-se ao crescimento contínuo de procura de transportes privados. Com o intuito de permitir gerir e controlar situações problemáticas surgiu a monitorização de fluxo de rede [1].

Nesta tese vamos abordar o problema da monitorização de uma rede de telecomunicações. Para o efeito vamos apenas propor algumas formulações para o problema e discutir eventuais considerações adicionais que se podem usar. Começamos por tratar do problema no qual os caminhos do fluxo de dados a monitorizar são conhecidos *à priori*. Neste caso, em que os caminhos a monitorizar são conhecidos, o objetivo é o de determinar a localização dos dispositivos de monitorização, preferencialmente o menor número possível de dispositivos. Este problema pode ser visto como um problema de cobertura.

Para este problema podemos considerar adicionalmente que cada monitor tem capacidade limitada ou então que o interesse está antes na maximização dos fluxos monitorizados.

Numa segunda fase vamos tentar estudar o problema no qual os caminhos não são conhecidos *à priori*. Este problema é manifestamente mais complexo. Vamos apresentar uma sua formulação e alguns exemplos, embora não tenhamos conseguido cumprir com todos os requisitos que consideramos necessário.

A estrutura desta tese é a seguinte.

No segundo capítulo apresentamos alguns conceitos gerais de que vamos necessitar ao longo da tese. Alguns destes conceitos foram retirados do livro otimização Combinatória e Programação Linear [2] e do livro Matemática Discreta [3].

No terceiro capítulo apresentamos o problema de cobertura, algumas suas versões incluindo o problema de partição e alguns exemplos.

No quarto capítulo é feita uma descrição geral do problema do dimensionamento e localização de monitores em redes de telecomunicações no qual os caminhos efetuados pelo fluxo na rede são conhecidos.

No quinto capítulo apresentam-se os resultados de testes computacionais para um conjunto de problemas gerados aleatoriamente. Para tal usa-se o software Xpress conjuntamente com os modelos apresentados para obter soluções.

No sexto capítulo é feita uma descrição do problema de localização de monitores, não se conhecendo os caminhos efetuados pelo fluxo na rede.

Finalmente no Capítulo 7 são apresentadas conclusões.

2 – Alguns Conceitos

O problema do dimensionamento e localização de monitores em redes de telecomunicações insere-se no âmbito de problemas de otimização combinatórios. No estudo de problemas de otimização, um dos primeiros passos na metodologia da investigação operacional está a construção de um modelo [2]. Um **modelo** é uma representação simplificada da realidade que traduz as características do problema de uma forma adequada e simples. Aquando da construção de um modelo temos de identificar vários componentes do problema, entre elas as decisões a tomar e as restrições sob as quais as decisões devem ser tomadas. Uma vez identificados esses componentes a construção do modelo de investigação operacional inicia-se com a definição de **variáveis de decisão** que nos indica a solução e que são usadas para construir as **restrições** e o critério de decisão que nos permite definir uma **função objetivo** adequada. O resultado, deste processo, é um modelo matemático que relaciona as variáveis, as restrições e a função objetivo. Num **modelo de programação** identificamos a função objetivo, o conjunto de restrições funcionais que traduzem as características do problema e o

conjunto de restrições nos valores das variáveis. A esse modelo matemático chamamos **modelo de programação** e pode ser de programação linear, programação linear inteira, programação não linear, programação multicritério, programação estocástica, etc.

Num modelo de **programação linear** as variáveis são contínuas e tanto as funções que definem as restrições como a função objetivo apresentam comportamento linear.

Um modelo de **programação linear inteira** é um modelo de programação linear no qual as variáveis não podem assumir valores contínuos, ficando condicionadas a assumir valores inteiros.

Num modelo de **programação não linear** a função objetivo é não linear e as restrições podem ser lineares ou não lineares com variáveis reais. Nos modelos de **programação multicritério** encontramos várias funções objetivo. Num modelo de **programação estocástica** encontramos dados que envolvem incerteza e seguem alguma distribuição.

Uma **solução** do modelo de programação corresponde a um conjunto de valores para as variáveis que satisfaz todas as restrições funcionais do modelo. Uma **solução admissível** para além de satisfazer as restrições funcionais, satisfaz também as restrições no valor das variáveis. Estamos em presença da **solução do modelo** a que chamamos **solução admissível ótima** quando se trata de uma solução admissível cujo valor é o melhor (minimiza ou maximiza) valor da função objetivo de entre todas as outras soluções admissíveis do problema.

Ao valor da solução admissível ótima chamamos **valor ótimo** do problema.

Uma **relaxação** de um modelo de programação é a substituição do modelo por um mais simples de resolver que permita encontrar uma aproximação para o valor ótimo do problema.

Obtemos a **relaxação linear** de um modelo de programação linear inteira quando não consideramos as restrições no valor das variáveis a serem inteiras.

Para avaliar a qualidade das soluções obtidas pelas relaxações lineares dos modelos, utilizamos os valores de **gap**. Os valores de **gap** são calculados para cada exemplo através da seguinte fórmula:

$$gap = \frac{otimo - valor}{otimo} \times 100.$$

Sendo o “ótimo” o valor ótimo ou uma sua aproximação obtida através do valor de uma solução admissível e “valor” será o valor da relaxação linear do modelo que estamos a avaliar.

Muitos problemas de otimização são modelados considerando-os definidos num grafo. Um **grafo** é uma estrutura de abstração que representa um conjunto de elementos denominados nós ou vértices e suas relações de interdependência traduzidas por arestas. Denominando por $N = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto de vértices ou nós da estrutura e por $E = \{\{i, j\}, i, j \in N, i \neq j\}$ o conjunto das arestas que representam ligações existentes entre vértices, um grafo pode ser representado por $G = (N, E)$. Na Figura 1 representamos um grafo com um conjunto de nós $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e um conjunto de arestas $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 1\}, \{1, 6\}, \{2, 6\}, \{2, 5\}, \{5, 7\}\}$.

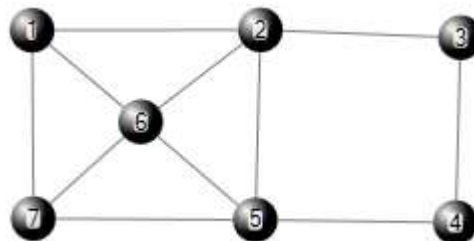


Figura 1- Grafo

Um **caminho** é uma sequência de vértices adjacentes na qual todos os nós/vértices visitados são distintos.

Utilizando o grafo do exemplo anterior podemos ver que a sequência 1, 7, 5, 6, 2, 3, 4 é um caminho do grafo e está representado na Figura 2.

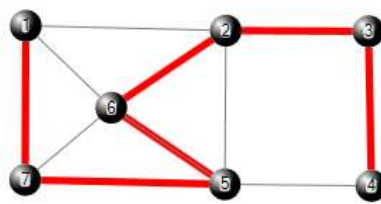


Figura 2- Caminho

Um grafo diz-se **orientado** quando é indicado o sentido das ligações entre os nós. Nesse caso, as arestas passam a chamar-se **arcos**. Na Figura 3 é mostrado um exemplo de grafo $G(N,A)$ orientado em que os nós são: $N=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ e os arcos são: $A=\{(1,2),(2,3),(3,4),(5,4),(5,6),(6,7),(7,1),(1,6),(6,2),(2,5),(5,7)\}$

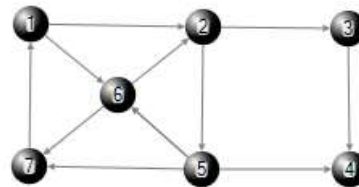


Figura 3- Grafo Orientado

Um **circuito ou ciclo** é uma sequência de nós e de arcos distintos que repete o último nó visitado.

1,6,2,5,7,1 é um circuito no grafo representado na Figura 4.

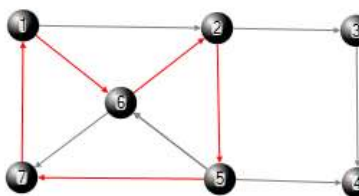


Figura 4- Circuito ou ciclo

Um **caminho Hamiltoniano** é um caminho que permite passar por todos os vértices de um grafo G , não repetindo nenhum. Caso esse caminho seja possível, ele descreve um circuito ou ciclo, este é denominado **ciclo Hamiltoniano** (ou **circuito Hamiltoniano**) em G . Na figura 5, representamos um caminho Hamiltoniano.

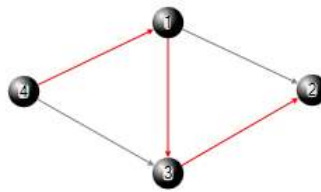


Figura 5- Caminho Hamiltoniano

Ao número de arestas que compõem um caminho chamamos **comprimento do caminho**.

A **matriz de adjacência A** é uma representação de um grafo G e é denotada por $A=[a_{ij}]$ em que as linhas e as colunas da matriz estão associadas aos nós do grafo. A matriz é booleana, ou seja, os seus elementos são 0 e 1. A matriz de adjacência é dada por:

$a_{ij} = 1$, se a aresta $\{i,j\}$ existe em G, ou seja se existe ligação entre o nó i e o nó j no grafo G;

$a_{ij} = 0$, se a aresta $\{i,j\}$ não existe em G ou seja, se não existe ligação entre o nó i e o nó j no grafo G.

Consideremos o seguinte exemplo:

O grafo $G(N,E)$ é composto pelo conjunto de nós $N=\{1,2,3,4,5,6\}$ e pelo conjunto de arestas $E=\{\{1,4\},\{2,4\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\}$.

Na Figura 6, está representada a matriz de adjacência e o respectivo grafo.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

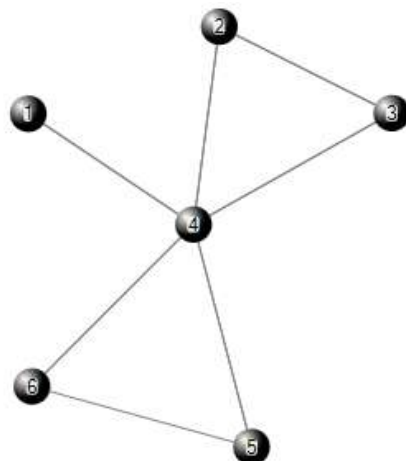


Figura 6 - Matriz de adjacência do grafo G

Pela matriz de adjacência podemos ver que o vértice 1 está ligado ao vértice 4, o vértice 2 está ligado ao vértice 3 e 4 e assim sucessivamente.

Uma **matriz de incidência** é uma representação de um grafo G em que as colunas da matriz correspondem às arestas do grafo e as linhas correspondem aos nós do grafo. Uma matriz $n \times m$ $A=[a_{ij}]$ é denominada de incidência do grafo $G=(N,M)$ se para todo o arco j que liga o nó k ao nó l temos:

$$a_{ij}=+1 \text{ se } i=k$$

$$a_{ij}=-1 \text{ se } i=l \text{ (para grafo orientado, sendo } a_{ij}=1)$$

$$a_{ij}=0 \text{ nos outros casos}$$

Consideremos o seguinte exemplo representado na Figura 7 para grafo orientado:

O grafo $G(N,M)$ é constituído pelos nós $N=\{1,2,3,4,5\}$ e pelos conjunto de arcos $M=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}=\{(1,3), (2,3), (3,5), (3,4)\}$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

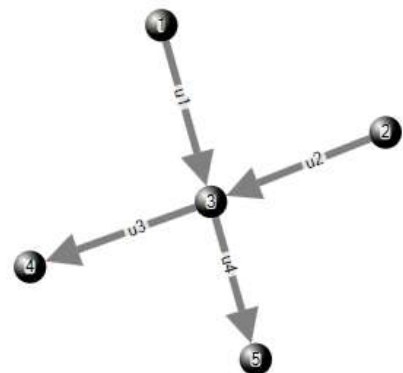


Figura 7 – Matriz de incidência de grafo orientado

Podemos ver pela matriz de incidência que o arco u_1 começa no vértice 1 e termina no vértice 3. O arco u_2 começa no vértice 2 e termina no vértice 3 e assim sucessivamente.

O exemplo apresentado na Figura 8 representa um grafo não orientado:

O grafo $G(N,M)$ é constituído pelo conjunto de nós $N=\{1,2,3,4,5\}$ e pelo conjunto de arestas $M=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}=\{\{1,3\}, \{2,3\}, \{3,5\}, \{3,4\}\}$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} u1 & u2 & u3 & u4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

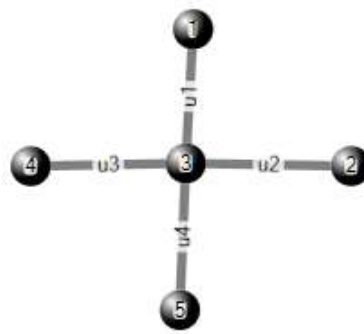


Figura 8 - Matriz de incidência de grafo não orientado

Podemos ver pela matriz de incidência que a aresta u1 une os vértices 1 e 3. A aresta u2 une os vértices 2 e 3 e assim sucessivamente.

Uma **matriz de incidência de caminhos** é uma representação de um grafo G em que as colunas da matriz correspondem aos vértices do grafo e as linhas correspondem aos caminhos no grafo. Uma matriz $n \times m$ $A=[a_{ij}]$ é denominada de incidência de caminhos do grafo $G=(N,M)$ se para todo vértice j que faz parte do caminho i temos:

$a_{ij}=1$ se o vértice j faz parte do caminho i

$a_{ij}=0$, caso contrário

Esta matriz irá ser utilizada no nosso problema.

Consideremos o seguinte exemplo:

O grafo G (N, M) é constituído pelo conjunto de nós $N=\{1,2,3,4,5,6\}$ e pelo conjunto de caminhos $M=\{C1,C2,C3\}$ onde $C1=\{1,3,4,5\}$, $C2=\{2,3,5\}$ e $C3=\{1,2,5,6\}$. Na Figura 9 está representada a matriz de incidência de caminhos e respetivo grafo.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} C1 \\ C2 \\ C3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

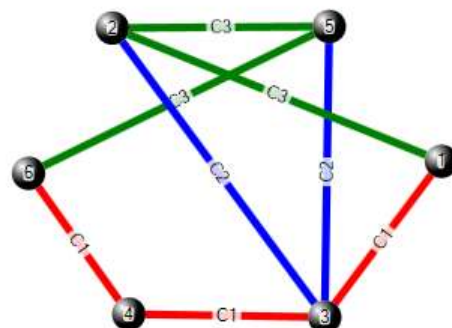


Figura 9- Matriz de incidência de caminhos

Podemos ver na matriz de incidência de caminhos que o vértice 1 faz parte do caminho 1 e do caminho 2. O vértice 2 faz parte do caminho 2 e 3 e assim sucessivamente. Visto de outra forma, podemos dizer a composição dos caminhos, ou seja, o caminho 1 é composto pelos vértices: 1, 3, 4 e 6. O caminho 2 é composto pelos vértices 2, 3, e 5 e assim sucessivamente.

Esta é a matriz que vamos utilizar no desenrolar desta tese.

Uma **cobertura de arestas por vértices de um grafo G** que por simplicidade se designa por **cobertura por vértices** de um grafo G é um subconjunto C de vértices de G tal que cada aresta de G é incidente em pelo menos um vértice de C . Diz-se que o subconjunto C cobre as arestas de G . Na Figura 10 estão representados exemplos de coberturas de vértice de grafos.

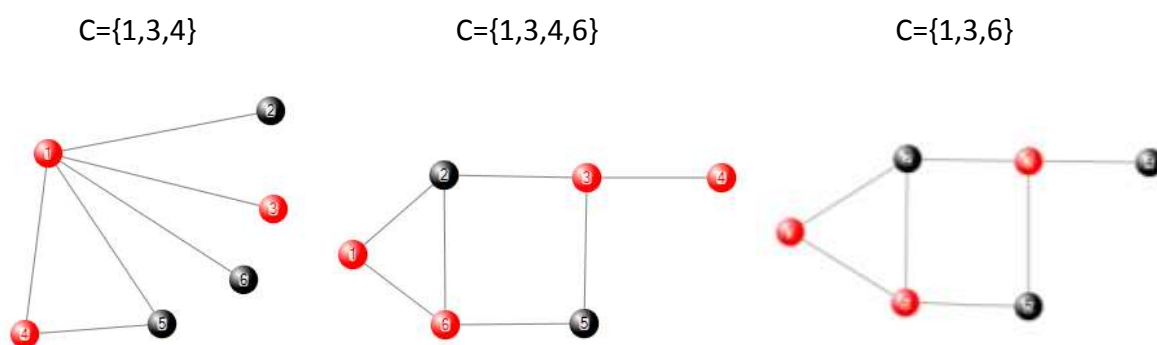


Figura 10 – Cobertura por vértices de um grafo

Uma **cobertura por arestas de um grafo G** é um subconjunto de arestas C de G de tal forma que cada vértice é um extremo de pelo menos uma aresta de C . Diz-se que o subconjunto C de arestas cobre os vértices de G . Na Figura 11 estão representados exemplos de coberturas por arestas de um grafo.

Seja $G_1(N, E)$ um grafo constituído pelo conjunto de nós $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e pelo conjunto de arestas $E = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{5, 6\}\}$



Figura 11 - Cobertura por arestas de um grafo G1 e respetiva matriz de incidência

E seja $G_2(N,E)$ um grafo constituído pelo conjunto de nós $N=\{1,2,3,4,5,6\}$ e pelo conjunto de arestas $E=\{u1,u2,u3,u4,u5,u6,u7\}=\{\{1,2\},\{1,6\},\{2,6\},\{2,3\},\{5,6\},\{3,5\},\{3,4\}\}$

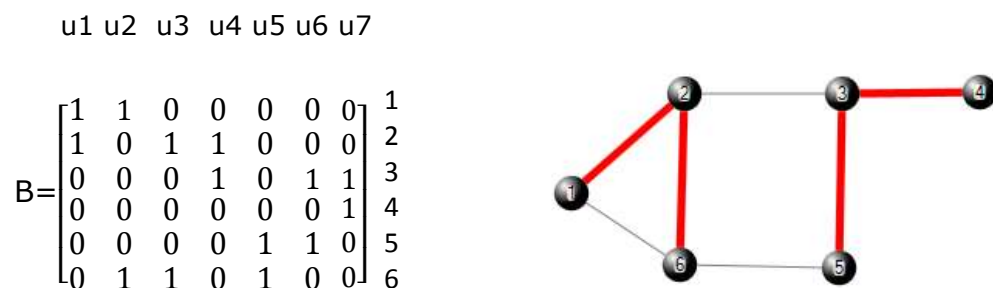


Figura 12- Cobertura por arestas de um grafo G2 e respetiva matriz de incidência

Dizemos que a família de subconjuntos $\{A_i: i \in I\}$ de um conjunto A é uma **partição** (sobre A) se satisfaz:

1. $A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$.
2. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$
3. $A_i \cap A_j \neq \emptyset \Rightarrow A_i = A_j$

Nas Figura 13 está representado um exemplo para a partição do círculo em 5 partes.

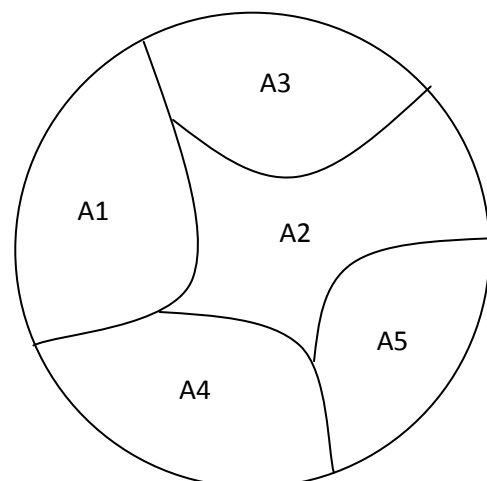


Figura 13 – Partição do círculo em 5 partes. A1, A2,...A5

Exemplo para **partição do conjunto dos vértices de um grafo G**.

Seja $G(N, E)$ constituído por um conjunto de nós $N=\{1,2,3,4,5,6\}$ e um conjunto de arestas $E=\{\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\}$

Na figura 14 está representado uma partição para um conjunto de vértices e respetiva matriz de adjacência.

Seja A a matriz de adjacência

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

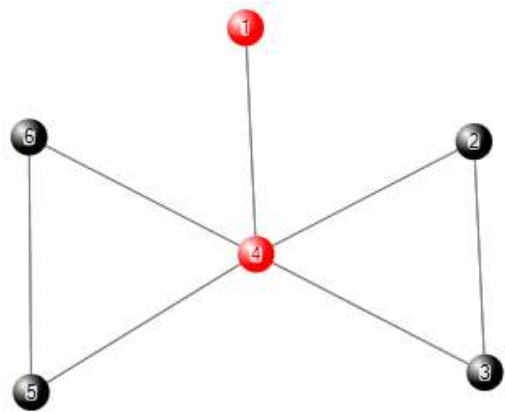


Figura 14 – Partição de conjunto de vértices

Os subconjuntos $A_1=\{1,4\}$ e $A_2=\{2,3,5,6\}$ constituem uma partição do conjunto de vértices.

Exemplo de **partição do conjunto das arestas** de um grafo G.

Seja $G(N, E)$ constituído por um conjunto de nós $N=\{1,2,3,4,5,6\}$ e um conjunto de arestas $E=\{u1,u2,u3,u4,u5,u6\}=\{\{1,2\},\{3,5\},\{4,6\},\{1,5\},\{1,6\},\{5,6\}\}$

Seja A a matriz de incidência

$$A = \begin{array}{cccccc|c} u1 & u2 & u3 & u4 & u5 & u6 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}$$

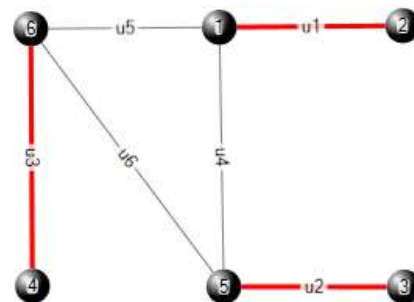


Figura 15 – Partição do conjunto das arestas

Os subconjuntos $A_1=\{u1,u2,u3\}$ e $A_2=\{u4,u5,u6\}$ constituem uma partição do conjunto de arestas do grafo.

3 - Problema de cobertura e partição

O problema de dimensionamento e localização de monitores em redes de telecomunicações pode ser encarado como um problema de cobertura/partição com algumas restrições adicionais.

3.1. Problema de cobertura simples

Começamos por descrever o problema de cobertura simples [4]. O problema de cobertura simples é um problema de otimização combinatória que consiste na determinação de um subconjunto das colunas de uma matriz de 0 e 1, tal que todas as linhas são cobertas e o custo desse subconjunto é mínimo relativamente a todas as outras possíveis coberturas de linhas.

Podemos ter uma cobertura por vértices se usarmos a matriz de adjacência, uma cobertura de arestas se tivermos uma matriz de incidência de arestas e podemos ter uma cobertura de caminhos se tivermos uma matriz de incidência de caminhos.

Para definirmos o problema de cobertura consideramos uma matriz $A=[a_{ij}]$ com $a_{ij} \in \{0,1\}$ de ordem $(m \times n)$ e consideramos definidos o conjunto $N=\{1,...,n\}$ das colunas de A e o conjunto $M=\{1,..., m\}$ das linhas de A . Consideramos ainda definido, para cada coluna $j \in N$, c_j o custo da coluna $j \in N$. O problema de cobertura simples (PC) consiste na determinação de um subconjunto das colunas da matriz A tal que todas as linhas são cobertas e o custo desse subconjunto é mínimo relativamente a todas as outras possíveis coberturas de linhas. Usando as variáveis binárias x_j que indicam se a coluna j pertence ou não à solução. Uma formulação em programação linear inteira (PLI) para o problema de cobertura é:

Formulação (PC) – Problema de cobertura

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{PC 1}$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1, i \in M \quad \text{PC 2}$$

$$x_j \in \{0,1\}, j \in N, \quad \text{PC 3}$$

A função objetivo (PC1) visa minimizar o custo da determinação do subconjunto das colunas de uma matriz tal que todas as linhas são cobertas.

As desigualdades (PC2) garantem a cobertura de linhas por pelo menos uma coluna, ou seja, a seleção de pelo menos uma coluna em cada linha.

A restrição (PC3) indica que a variável x_j é binária.

Exemplo de cobertura simples:

Seja $C=[1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2]$ a matriz dos custos e $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Aa colunas 2 e 4 constituem uma cobertura de custos 4, assim como as colunas 1,2 e 5 constituem uma cobertura de custo 4.

Já as colunas 3 e 4 constituem uma cobertura de custo igual a 5, mas como queríamos custo mínimo esta solução não seria ótima.

Se as desigualdades anteriores (PC2) forem substituídas por igualdades, o problema é conhecido por problema de partição simples. Uma vez que o que se vai determinar é a cobertura de linhas por exatamente uma coluna.

Apresentamos agora a sua formulação:

Formulação (PP) – Problema de partição

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{PP 1}$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 1, i \in M \quad \text{PP 2}$$

$$x_j \in \{0,1\}, j \in N, \quad \text{PP3}$$

A função objetivo (PP1) visa minimizar o custo da determinação do subconjunto das colunas de uma matriz tal que todas as linhas são cobertas.

As desigualdades (PP2) garantem a cobertura de linhas por exatamente uma coluna. O que significa que exatamente uma coluna, tem de ser selecionada em cada linha. Desta forma são formados os conjuntos de partição que correspondem a cada coluna e os seus elementos às linhas que essa coluna cobre.

A restrição (PP3) indica que a variável x_j é binária.

Ambos os problemas têm um vasto campo de aplicações como:

- Escalonamento de pessoal (pessoal tripulante de aviões ou de veículos de transporte de passageiros)
- Roteamento de veículos de recolha e distribuição de produtos
- Localização de equipamentos/serviços
- etc

O problema de cobertura simples tem ainda estreita ligação com outros problemas de otimização combinatória, nomeadamente alguns problemas de teoria dos grafos. Mais à frente apresentamos como exemplo um problema conhecido como o problema do circuito de cobertura.

Exemplo de uma partição simples:

Seja $C=[1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2]$ a matriz dos custos e $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

As colunas 2 e 4 constituem uma partição de custo 4.

As colunas 1,3 e 5 também constituem uma partição embora de custo 5.

3.2. Problema de cobertura múltiplo

Quando na formulação anterior o termo independente do conjunto das restrições (PC2) é substituído por um vetor $B=[b_i]$ de inteiros arbitrários, o problema passa a designar-se por problema de cobertura múltipla correspondente ao seguinte programa matemático:

Formulação do (PCM) - Problema de cobertura múltiplo

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{PCM 1}$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, i \in M$$

PCM2

$$x_j \in \{0,1\}, j \in N,$$

PCM3

Onde x_j é a variável binária que assume valor 1 quando a coluna j de A está na solução e 0, caso contrário. O valor c_j representa o custo unitário associado à variável x_j .

A função objetivo (PCM1) visa minimizar o custo da determinação do subconjunto das colunas de uma matriz tal que todas as linhas são cobertas.

As restrições (PCM2) garantem que as linhas sejam cobertas por pelo menos um número de colunas especificado na vetor B .

A diferença relativamente ao problema anterior é que no problema da cobertura simples as linhas eram cobertas por pelo menos uma coluna enquanto que neste problema as linhas são cobertas por um número de colunas especificados na matriz B .

O (PCM) surge em aplicações relacionadas com a localização de equipamento de comunicação ou distribuição de energia onde é necessário assegurar o funcionamento do sistema mesmo quando um dos componentes falha.

Exemplo de cobertura múltipla:

Seja $C=[1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2]$ a matriz dos custos e $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e seja $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ uma

matriz de números inteiros.

Como podemos ver no exemplo de cobertura simples, os conjuntos de colunas $\{2,4\}$, $\{1,2,5\}$ e $\{3,4\}$ constituíam coberturas simples agora não são soluções admissíveis para o caso de cobertura múltipla.

O conjunto $\{2,3,4,5\}$ é uma cobertura múltipla com custo 8.

3.3.- Problema de cobertura generalizado

Quando no (PCM) se admite que uma coluna pode ser selecionada tantas vezes quanto as necessárias, tem-se o problema de cobertura generalizado:

Formulação (PCG) – Problema de cobertura generalizado

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{PCG1}$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i \in M \quad \text{PCG2}$$

$$x_j \geq 0 \text{ e inteiros}, j \in N, \quad \text{PCG3}$$

As variáveis x_j são positivas e inteiras e representam o número de vezes que determinada coluna pode ser selecionada.

A função objetivo (PCG1) visa minimizar o custo da determinação do subconjunto das colunas de uma matriz tal que todas as linhas são cobertas.

As restrições (PCG2) garantem que as linhas sejam cobertas por um número de colunas especificado na matriz b_i .

Notamos que a diferença entre esta formulação e a formulação anterior está na restrição PCG3. PCG3 indica que as variáveis são positivas e inteiras contrariamente à formulação anterior (PCM3) em que indica que as variáveis são binárias.

O (PCG) surge fundamentalmente em aplicações relacionadas com o escalonamento de pessoal, em particular, condutores de veículos de transporte de passageiros, enfermeiros, telefonistas, guardas de estabelecimentos, etc

Exemplo de cobertura generalizada:

$$\text{Seja } C=[1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2] \text{ a matriz dos custos, } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e seja } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ uma}$$

matriz de números inteiros.

Desta vez teríamos a solução $\{1,2,2,5,5\}$ com custo 7 e também $\{2,2,4,5\}$ com custo 7.

3.4. Problema de localização de concentradores

Este problema que vamos descrever de seguida é um exemplo de um problema de partição uma vez que as suas restrições são igualdades com restrições adicionais de cardinalidade.

Este exemplo foi descrito no livro de Otimização Combinatória e Programação Linear [2].

O problema em causa consiste em responder a várias questões:

Quantos concentradores serão necessários?

Onde deverão eles ser localizados?

Quais os terminais serão designados a quais concentradores?

O modelo considera a existência de três níveis na estrutura hierárquica de uma rede de comunicações:

Terminais, $i \in N, N = \{1, \dots, n\}$, normalmente idênticos, dispersos geograficamente e de localização conhecida.

Concentradores, $j \in M, M = \{1, \dots, m\}$, unidades de porte e capacidades superiores aos terminais, podendo ou não estarem localizadas junto aos terminais, e cujo número e localização, normalmente, é desconhecido.

Unidade central, C_0 , equipamento de grande porte quando comparado com os demais elementos e de localização normalmente conhecida.

Assume-se que os concentradores são ligados diretamente à central e os terminais diretamente aos concentradores.

As variáveis envolvidas no problema são x_{ij} e y_i e são definidas da seguinte forma:

x_{ij} é uma variável binária que assume o valor 1 se o terminal i está ligado ao concentrador j , $j \in M$ e 0 caso contrário.

y_i é uma variável binária que assume o valor 1 se o nó i , $i \in M$ é escolhido para concentrador e 0, caso contrário.

x_{0j} é uma variável binária que indica se o terminal j está ou não ligado à central.

Formulação (PLC) – Problema de localização de concentradores

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^m d_j y_j \quad \text{PLC 1}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=0}^m x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n \quad \text{PLC 2}$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq k y_j, j = 1, \dots, m \quad \text{PLC 3}$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\}, \forall i, j \quad \text{PLC 4}$$

A função objetivo (PLC1) visa minimizar o custo (c_{ij}) de ligar o Terminal i ao concentrador j e o custo (d_j) de implantação de uma unidade concentradora (y_j) no nó j .

A restrição (PLC2) garante que um terminal seja ligado diretamente aos seus concentradores e os concentradores ligados diretamente à central.

A restrição (PLC3) garante que o concentrador j não recebe mais do que k terminais para gerir.

3.5.- Problema do circuito de cobertura

Este é um problema interessante pois permite, pela sua formulação, ter uma clara visão da interdependência entre os problemas de programação linear inteira e a teoria de grafos.

Este problema foi descrito por Gendreau [5] e também referenciado em [2].

Seja $G=(V \cup W, E)$ um grafo não orientado em que $V \cup W$ compõe o conjunto dos vértices e $E=\{(i, j): i, j \in (V \cup W)\}$ o conjunto de arestas. Seja o vértice $i=3$ um depósito e V o conjunto dos vértices que podem ser visitados a partir do vértice 3. Designemos por T , $T \subseteq V$, um conjunto de vértices que devem ser visitados a partir o vértice 3 que também pertence ao T e W um conjunto que deve ser coberto. É definida uma matriz C sobre E que satisfaz a condição de desigualdade triangular.

O Problema de circuito de cobertura (PCC) consiste em determinar um ciclo Hamiltoniano de comprimento mínimo sobre um subconjunto de V de forma que o circuito contenha todos dos vértices de T e todo o vértice de W esteja coberto pelo circuito, ou seja, todo vértice de W está a uma distância máxima c de algum vértice do circuito. Considerando para exemplo o grafo da figura 16 com todos os arcos de peso 1, independentemente do seu sentido. Consideremos a distância c também igual a 1, $i = 3$, $W = \{1, 2, 4, 14\}$, e $T = \{3, 5, 6, 7, 8, 10, 13\}$ uma solução de PCC está apresentada na Figura 17.

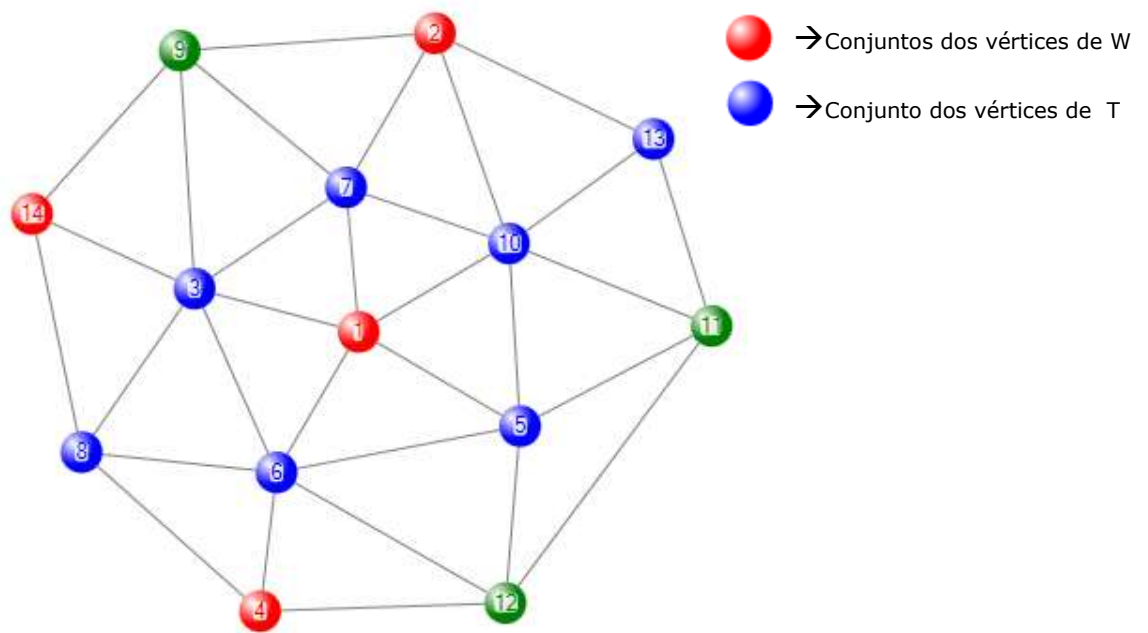


Figura 16 – Grafo com todos os arcos co peso 1 em que o sentido não é relevante

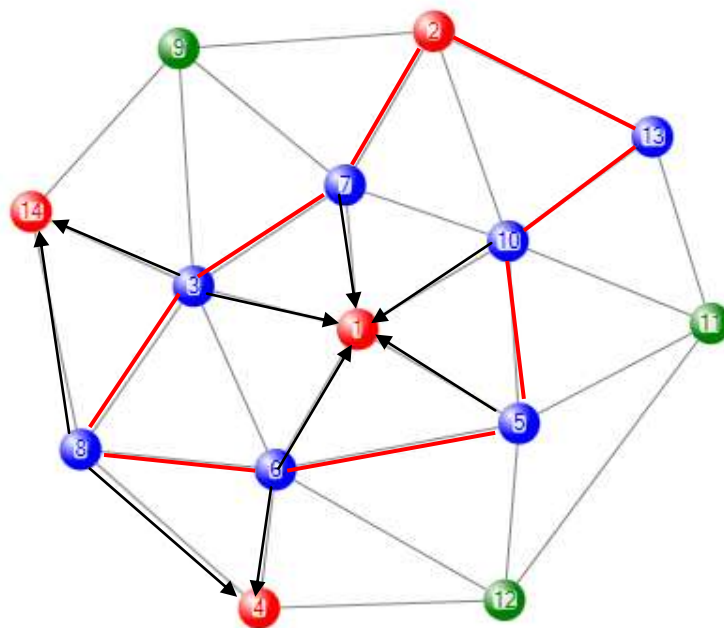


Figura 17 - Solução do problema PCC

Analisando o grafo da solução vemos que temos um circuito com os elementos de T em que os elementos de W estão a uma distância c do circuito. O vértice 1, 4 e 14 estão a uma distância 1 e o vértice 2 está no próprio circuito logo também está coberto.

As variáveis X_{ij} e y_k são definidas da seguinte forma:

Para $i, j \in V$, e $i < j$, $x_{ij} = 1$ se e só se a aresta $(i, j) \in E$ está no circuito, e 0 caso contrário.

$y_k = 1$ se e só se k pertencer ao circuito.

Ainda temos dois coeficientes $\delta_{lk}=1$ se e só se l pode ser coberto por $k \in V$ e é definido $S_l = \{k \in V : \delta_{lk}=1\}$ para todo o $l \in W$

Podemos formular o problema de circuito de cobertura como um problema de programação inteira [5] da seguinte forma:

Formulação (PCC) – Problema do circuito de cobertura

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i < j} c_{ij} x_{ij} \quad \text{PCC 1}$$

sujeito a

$$\sum_{k \in S_l} y_k \geq 1, \quad l \in W \quad \text{PCC 2}$$

$$\sum_{i < j} x_{ik} + \sum_{j > k} x_{kj} = 2y_k, \quad k \in V \quad \text{PCC 3}$$

$$\sum_{\substack{i \in S, j \in V \setminus S \\ \text{ou } j \in S, i \in V \setminus S}} x_{ij} \geq 2y_t, \quad S \subset V, 2 \leq |S| \leq n-2, T \setminus S \neq \emptyset, t \in S \quad \text{PCC 4}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad 1 \leq i < j \leq n \quad \text{PCC 5}$$

$$y_k = 1 \quad k \in T \quad \text{PCC 6}$$

$$y_k \in \{0,1\} \quad k \in V \setminus T \quad \text{PCC 7}$$

A função objetivo (PCC1) consiste em minimizar o custo total do circuito.

A restrição (PCC2) assegura que cada vértice de W é coberto pelo circuito. A restrição (PCC3) garante a continuidade do circuito, ou seja, se k está no circuito ($y_k=1$) então exatamente duas arestas ligadas a ele também estarão no circuito.

A restrição (PCC4) evita que a solução contenha subcircuitos, ou seja que a resposta do problema seja um ciclo único e fechado. Para tal, as restrições devem ser criadas de tal maneira que para cada vértice existente no circuito, exista um meio de chegar a qualquer outro vértice também pertencente ao circuito.

A restrição (PCC5) indica que as variáveis que representam as arestas (x_{ij}) são binárias.

A restrição (PCC6) exige que os vértices de T pertençam ao circuito.

Por fim, a restrição (PCC7) determina que as variáveis que representam os vértices (y_k), sejam binárias.

4 - Dimensionamento e localização de monitores em redes de telecomunicações

A monitorização em redes de telecomunicações constitui um processo de decisão complexo. O rápido desenvolvimento de redes de telecomunicações e a necessidade cada vez maior de responder de forma eficaz e eficiente a novas situações, levaram as empresas de telecomunicações a dedicar-lhes uma atenção especial.

É necessário considerar, por um lado, os custos de instalação e manutenção de dispositivos de monitorização e por outro lado, a qualidade do serviço que se pretende que seja eficazmente controlada.

O processo de monitorização de redes pode ser encarado como um problema no qual se procura minimizar os custos totais de instalação de dispositivos de monitorização.

A principal finalidade consiste em encontrar numa rede de telecomunicações, um conjunto mínimo de nós onde são instalados dispositivos de monitorização que irão monitorizar toda a rede.

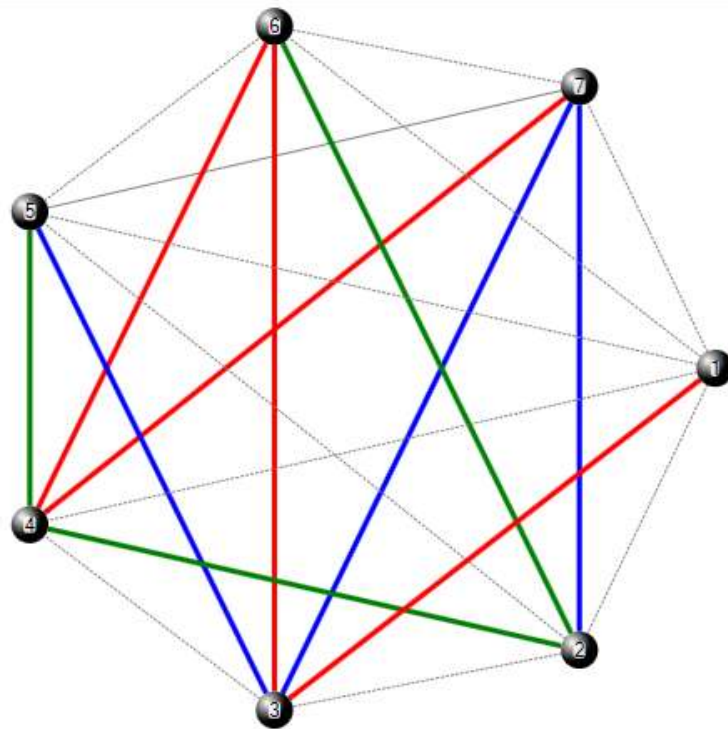
Mais especificamente, a solução do problema da monitorização de redes de telecomunicações consiste na determinação da localização de um conjunto de dispositivos de monitorização que garanta a monitorização de todos os caminhos da rede, minimizando os custos associados à instalação dos dispositivos de monitorização.

Para definir o problema consideremos o grafo $G=(N,A)$ em que $N=\{1,2,...,n\}$ é o conjunto de nós de uma rede de telecomunicações e $A=\{(i,j), i,j \in N, i \neq j\}$ é o conjunto de arcos que fazem a ligação entre os nós. Definimos também um conjunto de comodidades ou fluxos $K=\{1,2,...,k\}$, de tal modo que a cada comodidade $k \in K$ está associado um caminho definido pelo conjunto de nós $N_k \subseteq N$. Cada caminho associado a cada comodidade $k \in K$ pode ser monitorizado por qualquer um dos nós no conjunto N_k . Seja ainda c_i o custo associado à instalação do dispositivo de monitorização no nó i .

Exemplo:

Seja $N=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ o conjunto dos nós e $K=\{1,2,3\}$ o conjunto dos caminhos, o caminho 1 é composto pelos seguintes nós $N_1=\{1,3,6,4,7\}$, o caminho 2 é composto pelos nós $N_2=\{2,7,3,5\}$ e finalmente o caminho 3 é composto pelos nós $N_3=\{6,2,4,5\}$.

De seguida será apresentado o respetivo grafo do problema:



O objetivo é o de minimizar o custo total de instalação de dispositivos de monitorização de modo a que todos os caminhos (comodidades) sejam monitorizados.

Para modelar o problema usando uma formulação em programação linear inteira consideramos as variáveis x_{ik} e y_i . As variáveis binárias x_{ik} são definidas do seguinte modo:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se o nó } i \text{ monitoriza a comodidade } k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \forall i \in N, k \in K$$

E as variáveis y_i que indicam se num determinado nó i é instalado um dispositivo de monitorização:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se é instalado um dispositivo de monitorização no nó } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \forall i \in N$$

Formulação (MRT1) – Monitorização de redes de telecomunicações

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in N} c_i y_i \quad \text{MRT 1.1}$$

sujeito a

$$\sum_{i \in N_k} x_{ik} = 1, \quad k \in K \quad \text{MRT 1.2}$$

$$x_{ik} \leq y_i, \quad i \in N, k \in K \quad \text{MRT 1.3}$$

$$x_{ik} \text{ e } y_i \in \{0,1\}, i \in N, k \in K \quad \text{MRT 1.4}$$

A função objetivo MRT1.1 calcula o valor para o custo total de ativação dos dispositivos de monitorização nos nós da rede. A restrição MRT1.2 garante que cada comodidade/caminho $k \in K$ é monitorizado por um único nó. A restrição MRT1.3 garante que um caminho é monitorizado por um nó apenas se nesse nó foi instalado um dispositivo de monitorização. A restrição MRT1.4 indica que as variáveis x_{ik} e y_i são binárias.

Consideramos a relaxação linear deste modelo que se obtém substituindo a restrição (MRT1.4) por:

$$0 \leq x_{ik} \leq 1 \text{ e } 0 \leq y_i \leq 1, i \in N, k \in K$$

Consideramos o seguinte exemplo:

Nº de Nós: 10

Nº de caminhos: 3

Custos de instalação dos dispositivos de monitorização para cada nó:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
771	1155	180	311	52	1138	883	1464	410	321

Caminhos:

1º Caminho: 3→7→6→10→8→4

2º Caminho: 2→3→9→8→5→4

3º Caminho: 7→2→9→4→6→3

A matriz do problema apenas indica se o nó pertence ou não ao caminho. Para o problema não interessa a sequência dos nós, por isso, colocamos os nós nas colunas e os caminhos nas linhas, preenchemos a matriz com 1 se o nó pertence ao caminho e 0 caso

contrário. Deste modo podemos dizer que os elementos a_{ij} da matriz são da seguinte forma:

$a_{ij}=1$ se o nó j pertence ao caminho i

$a_{ij}=0$, caso contrário

Matriz de incidência de caminhos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pela matriz podemos ver que tanto o nó 3 como o nó 4 poderiam monitorizar os três caminhos mas como a instalação de um monitor no nó 3 é mais barato então seria instalado um dispositivo de monitorização neste nó.

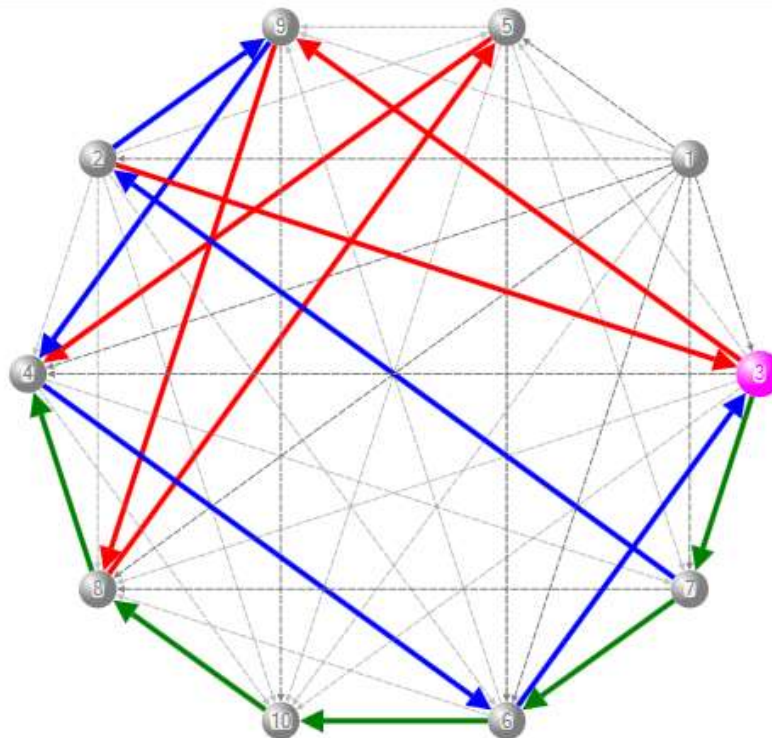


Figura 18 – Grafo do MRT1 com 10 nós e 3 caminhos

Podemos ver os 3 caminhos com cores diferentes (vermelho, azul e verde) e verificar que neste caso basta escolher o nó representado a cor-de-rosa para monitorizar a rede.

Uma variante deste problema consiste na limitação do número de caminhos que determinado nó $i \in N$ poderá monitorizar. Esse limite é designado por m e poderá ser diferente de nó para nó. Ou seja, o nó 1 poderá monitorizar 3 caminhos enquanto que o

nó 2 poderá monitorizar só 1 caminho. Este limite poderá ser diferente de nó para nó porque o volume de processamento permitido ou disponibilizado poderá ser diferente de nó para nó.

Pretendemos ainda com esta formulação que o objetivo seja o de minimizar o custo total de instalação de dispositivos de monitorização embora desta vez tenha a limitação do número de caminhos que determinado nó poderá monitorizar.

Considerando as mesmas variáveis do problema anterior temos o seguinte modelo em programação linear inteira:

Formulação (MRT2) – Monitorização de redes de telecomunicações

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in N} c_i y_i \quad \text{MRT2. 1}$$

Sujeito a

$$\sum_{i \in N_k} x_{ik} = 1, \quad k \in K \quad \text{MRT2. 2}$$

$$\sum_{k \in K} x_{ik} \leq m_i y_i, \quad i \in N \quad \text{MRT2. 3}$$

$$x_{ik} \text{ e } y_i \in \{0,1\}, i \in N, k \in K \quad \text{MRT2. 4}$$

A função objetivo é igual à do problema anterior, ou seja, o objetivo é minimizar o custo de instalação de dispositivos de monitorização. A restrição MRT2.2 é igual à MRT1.2 do problema anterior pois garante que apenas um nó monitoriza cada caminho. E a restrição MRT2.3 garante um limite para o volume de monitorização, ou seja, cada nó i tem limite máximo de comodidades/caminhos que poderá monitorizar. A restrição MRT2.4 garante que as variáveis sejam binárias.

Consideramos a relaxação linear deste modelo que se obtém substituindo a restrição (MRT2.4) por:

$$0 \leq x_{ik} \leq 1 \text{ e } 0 \leq y_i \leq 1, i \in N, k \in K$$

Consideremos o seguinte exemplo:

Número de Nós: 10

Número de caminhos: 3

Custos de instalação dos dispositivos de monitorização para cada nó:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
203	357	163	1471	542	1089	1389	1027	1080	1474

Número máximo de caminhos que cada nó poderá monitorizar:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	2	1	1	1	3	1	1

Caminhos:

5→6→4→7→8

3→2→8→7→5→9→10→6

3→4→9→6→7→8

A matriz do problema apenas indica se o nó pertence ou não ao caminho. Para o problema não interessa a sequência dos nós, por isso, colocamos os nós nas colunas e os caminhos nas linhas, preenchemos a matriz com 1 se o nó pertence ao caminho e 0 caso contrário. Deste modo podemos dizer que os elementos a_{ij} da matriz são da seguinte forma:

$a_{ij}=1$ se o nó j pertence ao caminho i

$a_{ij}=0$, caso contrário

Matriz de incidência de caminhos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pela matriz podemos ver que tanto o nó 6, 7 ou 8 poderiam monitorizar os três caminhos. Mas analisando o grafo vemos que afinal seriam instalados 2 dispositivos de monitorização no nó 3 e no nó 5 pois ficaria mais barato do que instalar um monitor no nó 6, no nó 7 ou no nó 8.

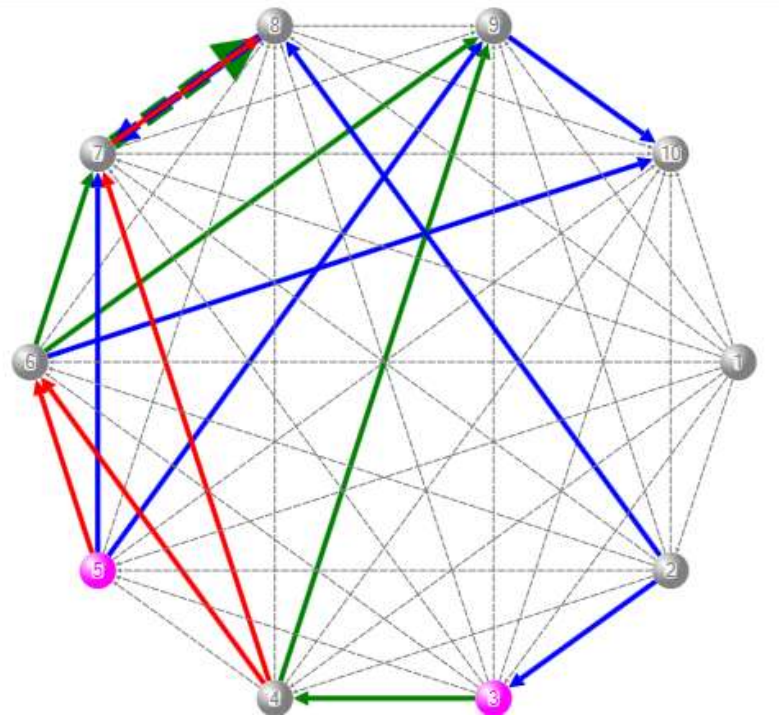


Figura 19 – Exemplo de grafo do MRT2 com 10 nós e 3 caminhos

Podemos ver mais uma vez que os caminhos estão representados com três cores diferentes (vermelho, verde, azul) e a cor-de-rosa estão representados os nós em que vão ser instalados os monitores. Para este exemplo já necessitaríamos de dois dispositivos de monitorização.

Note-se que, dependendo do parâmetro limite m_i , este problema poderá não ser admissível, isto é, podemos não ser capazes de monitorizar todas as comodidades mesmo se todos os nós se tornarem dispositivos de monitorização.

Supondo que todos os nós seriam considerados dispositivos de monitorização, podemos então agora considerar uma procura estimada d_k da comodidade k em que o objetivo da formulação desta vez seria maximizar o número total de procuras monitorizadas.

Para modelar o problema usamos uma formulação em programação linear inteira em que consideramos as variáveis z_{ik} e o parâmetro m_i . As variáveis binárias z_{ik} são definidas do seguinte modo:

$$z_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se o nó } i \text{ monitoriza a comodidade } k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \forall i \in N, k \in K$$

Apresentamos agora o seguinte modelo em programação linear inteira:

Formulação (MRT3) – Monitorização de redes de telecomunicações

$$\text{Maximizar } \sum_{k \in K} \sum_{i \in N_k} d_k z_{ik} \quad \text{MRT3. 1}$$

Sujeito a

$$\sum_{i \in N_k} z_{ik} \leq 1, \quad k \in K \quad \text{MRT3. 2}$$

$$\sum_{k \in K} z_{ik} \leq m_i, \quad i \in N \quad \text{MRT3. 3}$$

$$z_{ik} \in \{0,1\}, i \in N, k \in K \quad \text{MRT3. 4}$$

Aqui a função objetivo (MRT3.1) consiste em maximizar as procuras monitorizadas.

A restrição (MRT3.2) indica que cada caminho é monitorizado por, no máximo, um nó.

A restrição (MRT3.3) garante que determinado nó monitoriza um número máximo de comodidades.

Finalmente a restrição MRT3.4 garante que a variável z_{ik} é binária.

Embora não tenhamos provado, suspeitamos que a matriz das restrições desta formulação é totalmente unimodular.

Consideramos a relaxação linear deste modelo que se obtém substituindo a restrição (MRT3.4) por:

$$0 \leq z_{ik} \leq 1, i \in N, k \in K$$

Consideremos o seguinte exemplo:

Número de Nós: 10

Número de caminhos: 3

Número máximo de caminhos que cada nó poderá monitorizar:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1	2	3	2	2	2	1	3

Procura que cada caminho exige:

1	2	3
1	2	1

Caminhos:

5→2→8→4→10→3→1→7→6

10→9→4→8→2→5

5→3→4→2→10→7→9

Mais uma vez a matriz do problema apenas indica se o nó pertence ou não ao caminho. Para o problema não interessa a sequência dos nós, então colocamos os nós nas colunas e os caminhos nas linhas, preenchendo a matriz com 1 se o nó pertence ao caminho e 0 caso contrário. Deste modo podemos dizer que os elementos a_{ij} da matriz são da seguinte forma:

$a_{ij}=1$ se o nó j pertence ao caminho i

$a_{ij}=0$, caso contrário

Matriz de incidência de caminhos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

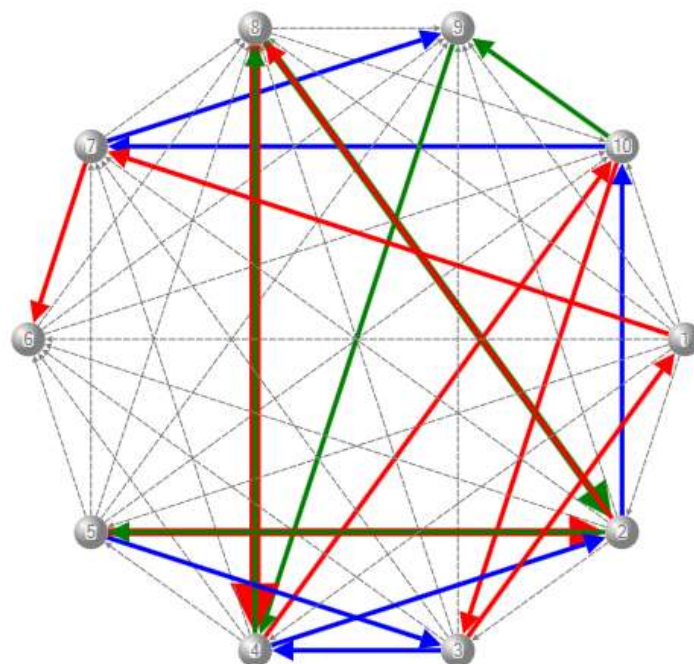


Figura 20 - Exemplo de grafo do MRT 3 com 10 nós e 3 caminhos

Neste exemplo mais uma vez os caminhos estão representados com três cores diferentes (vermelho, azul e verde). Neste caso não temos nenhum nó de cor diferente pois todos os nós vão ser monitores.

5 - Resultados computacionais

Neste capítulo vamos apresentar os resultados computacionais que obtivemos usando os modelos apresentados no Capítulo 4. Para realizar os testes utilizámos um computador Genuine Intel(R) CPU U4100 a 1,3 Ghz, com 4 GB de memória e o software de otimização Xpress 7.3. Testámos exemplos simples gerando aleatoriamente o número de nós que varia entre 10 e 200, para esses valores gerámos aleatoriamente a matriz dos custos cujos valores variam entre 50 e 1500 e geramos caminhos no grafo cujo comprimento varia entre 2 e 600.

Para gerar os caminhos utilizamos conjuntos. Começamos por considerar um conjunto vazio. Depois sucessivamente e aleatoriamente selecionamos um nó de N até perfazer um limite máximo de seleções. Se um nó selecionado já estiver no conjunto ele

não é incluído. Por exemplo, se quisermos criar um caminho utilizando no máximo 10 nós, começamos com um conjunto vazio e vamos acrescentando um número aleatório escolhido do conjunto N. Caso o número gerado já tenha sido utilizado, ou seja, se já estiver no conjunto não é incluído e é substituído pelo número 0 ($0 \notin N$). Mais precisamente, no máximo podemos escolher 10 números de N e obtemos a sequência (5, 6, 0, 4, 7, 8, 0, 0, 0, 0), isto significa que obtemos o caminho $5 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 8$.

Para o número de nós a variar entre 10 e 50 o número de caminhos varia entre 3 e 50. Para o número de nós a variar entre 60 e 70 nós temos o número de caminhos a variar entre 10 e 150. Para 100 nós o número de caminhos varia entre 10 e 200. Quando o número de nós varia entre 150 e 200 o número de caminhos varia entre 50 e 600.

Vamos apresentar resultados computacionais obtidos pelas formulações descritas no capítulo 4 usando o software Xpress.

Os resultados computacionais que obtivemos são apresentados em tabelas e gráficos. Para cada valor do número de nós (a variar entre 10 e 200) apresentamos uma tabela e dois gráficos.

Na tabela as três primeiras linhas identificam os valores colocados em cada coluna e depois indicamos em cada linha os resultados de cada exemplo. Em cada linha correspondente a um exemplo indicamos na primeira coluna o número de caminhos considerado nesse exemplo, depois o valor ótimo e o tempo computacional necessário para obter o ótimo e também o valor da relaxação linear e o tempo computacional necessário para obter o valor da relaxação linear. Indicamos no final o número de monitores instalados e o valor do GAP.

Para avaliar a qualidade das soluções obtidas pelas relaxações lineares dos modelos, utilizamos o valor do GAP que é igual a:

$$gap = \frac{\text{otimo} - \text{rel. linear}}{\text{otimo}} \times 100$$

O termo “ótimo” designa o valor da solução do problema linear inteiro enquanto que “rel. Linear” refere-se ao valor obtido através da relaxação linear do modelo correspondente.

No primeiro gráfico fazemos a comparação entre tempo computacional necessário para encontrar o valor ótimo e o tempo computacional necessário para encontrar o valor da relaxação linear. O segundo gráfico mostra a comparação entre o valor ótimo obtido e valor da relaxação linear.

Os resultados das Tabelas 1 a 9 dizem respeito aos valores obtidos com a formulação MRT1 em que se considera para cada tabela a mesma matriz de custos de instalação dos dispositivos de monitorização, apenas fazendo variar os caminhos gerados e o número de caminhos gerados. As Tabelas 10 a 18 dizem respeito aos valores obtidos com a formulação MRT1 em que agora também a matriz dos custos dos dispositivos de monitorização são diferentes em cada uma das linhas das tabelas, tal como anteriormente os caminhos gerados e o número de caminhos gerados também diferem. Os resultados das Tabelas 19 a 27 mostram os resultados obtidos com a formulação MRT2 em que a matriz dos custos de instalação de dispositivos de monitorização é a mesma para todos os exemplos de uma mesma tabela, tal como anteriormente os caminhos gerados e o número de caminhos diferem. Os valores do parâmetro m diferem em cada exemplo e são gerados aleatoriamente seguindo uma distribuição uniforme que varia entre 1 e o número de caminhos do exemplo. Nas Tabelas 28 a 36 apresentamos os resultados obtidos com a formulação MRT2 em que as matrizes dos custos de instalação dos dispositivos de monitorização são as mesmas em cada tabela, tal como anteriormente o número de caminhos que cada nó pode monitorizar está limitado a 1 ou 2, os caminhos gerados e o número de caminhos gerados também diferem. Nas tabelas 37 a 45 apresentamos os resultados obtidos com a formulação MRT2 em que agora as matrizes de custos de instalação dos dispositivos de monitorização são também diferentes em cada uma das linhas da tabela, tal como anteriormente o número de caminhos que cada nó poderá monitorizar varia entre 1 e o número de caminhos do exemplo, os caminhos gerados e o número de caminhos gerados também diferem. Nas

tabelas 46 a 54 estão os resultados obtidos usando a formulação MRT3. As procuras d_k são geradas aleatoriamente seguindo uma distribuição uniforme com valores entre 1 e o número de caminhos do exemplo. O parâmetro m que limita o número de caminhos que cada monitor poderá monitorizar foi também gerado aleatoriamente seguindo uma distribuição uniforme com valores entre 1 e 3.

Vamos agora passar a analisar alguns resultados obtidos, tendo em conta o número de nós e o número de caminhos necessários.

Na Tabela 1 podemos ver que para 10 nós e 30 caminhos seria necessário instalar 3 dispositivos de monitorização enquanto que para 50 caminhos apenas necessitaríamos de 2 dispositivos de monitorização, isto deve-se ao fato de que os caminhos são gerados aleatoriamente independentemente para cada exemplo. Isto quer dizer que no exemplo dos 50 caminhos não estão incluídos os 30 caminhos do exemplo anterior.

Na Tabela 2 podemos destacar dois casos particulares. No caso de 5 caminhos e de 7 caminhos o valor ótimo e o valor da relaxação linear são iguais, ou seja, o GAP é igual a zero. Deve-se também ao fato dos caminhos terem sido gerados aleatoriamente independentemente do exemplo.

Na Tabela 3 apenas para o número de caminhos 20 e 30 é que não temos GAP igual a zero, pois consegue-se obter uma solução ótima através da relaxação linear mais baixo.

Na Tabela 4 os resultados para 50 nós em que são escolhidos 5 caminhos apenas precisa de abrir um dispositivo de monitorização enquanto que para 3 e 7 caminhos é preciso 2 dispositivos de monitorização. Mais uma vez deve-se ao fato de o tipo de caminhos obtidos através da geração sejam independentes. Os 5 caminhos gerados provavelmente serão de mais fácil organização de forma a encontrar uma combinação para abrir apenas um dispositivo de monitorização.

Na Tabela 5, mais uma vez encontramos um número inferior de dispositivos que necessitam de ser instalados, quando para o exemplo anterior o número de dispositivos de monitorização necessários seria maior.

Na tabela 6, os resultados obtidos para o valor ótimo de 20 e 30 caminhos é igual o que significa que de 20 a 30 caminhos com 70 nós apenas necessitaríamos de instalar 3 dispositivos de monitorização.

Na Tabela 7, podemos ainda referir que obtivemos para 10 e 20 caminhos um GAP de zero. A partir de 100 nós não obtivemos mais valores ótimos com GAP igual a zero, o que quer dizer que estes exemplos são mais difíceis, pois têm GAP mais elevado.

Da análise das tabelas podemos verificar que quando o número de caminhos aumenta o número de nós necessários para monitorizar uma rede também aumenta e o respetivo custo também aumenta. Analisando os gráficos podemos comparar os tempos de execução entre o modelo linear inteiro e o modelo da relaxação linear. Verificamos que o tempo para obter o valor ótimo é muito maior do que o tempo para obter o valor da relaxação linear. Para cada valor do número de nós o tempo e o valor do GAP aumenta com o aumento do número de caminhos. Ainda podemos dizer que os valores do gap até aos 50 nós eram relativamente baixos, a partir desse valor os valores do gap começam a aumentar.

Para estas tabelas temos sempre o tempo ótimo maior do que o tempo da relaxação linear, o mesmo acontece com o valor ótimo que é sempre maior do que valor ótimo da relaxação linear.

Tabela 1 – Resultados para 10 nós com custos fixos usando o MRT1

10 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	180	1,154	180	0,016	1	0,0
5	180	0,203	180	0	1	0,0
7	232	0,062	232	0	2	0,0
10	363	0,141	363	0	2	0,0
20	491	0,078	491	0	2	0,0
30	543	0,266	476,5	0	3	12,2
50	462	0,094	462	0	2	0,0

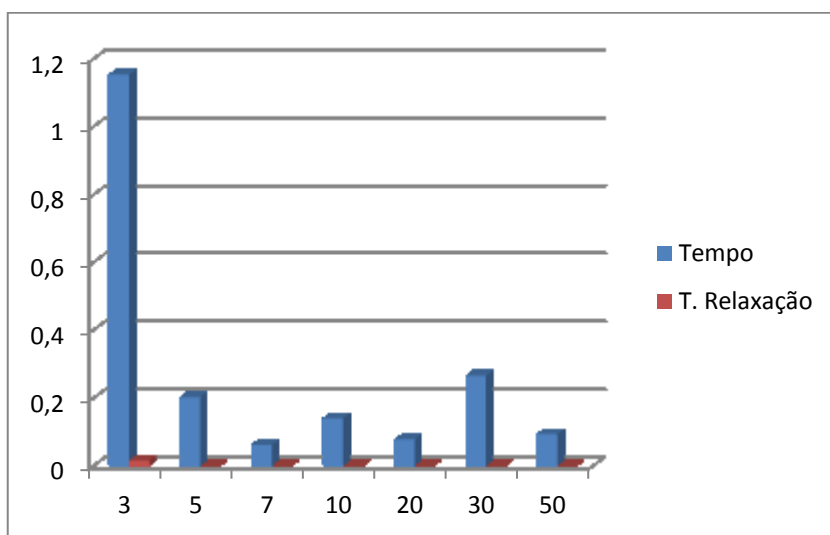


Gráfico 1- Tempos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

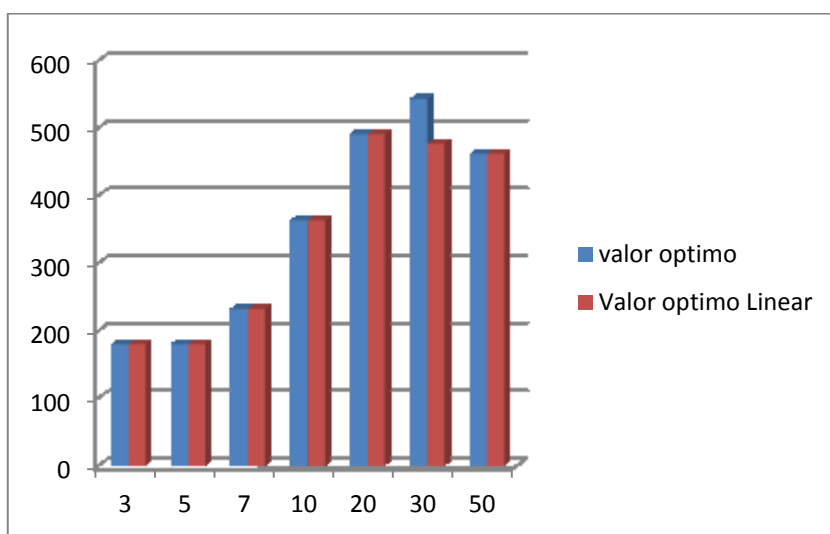


Gráfico 2 - Valores ótimos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 2 - Resultados para 20 nós com custos fixos usando o MRT1

20 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	679	0,094	675,5	0	1	0,52
5	679	0,234	679	0	1	0,00
7	900	0,062	900	0	2	0,00
10	1072	0,078	974,5	0	2	9,10
20	1179	0,296	991,714	0	2	15,89
30	1293	0,359	1076,6	0	3	16,74
50	1291	0,297	1143	0,016	3	11,46

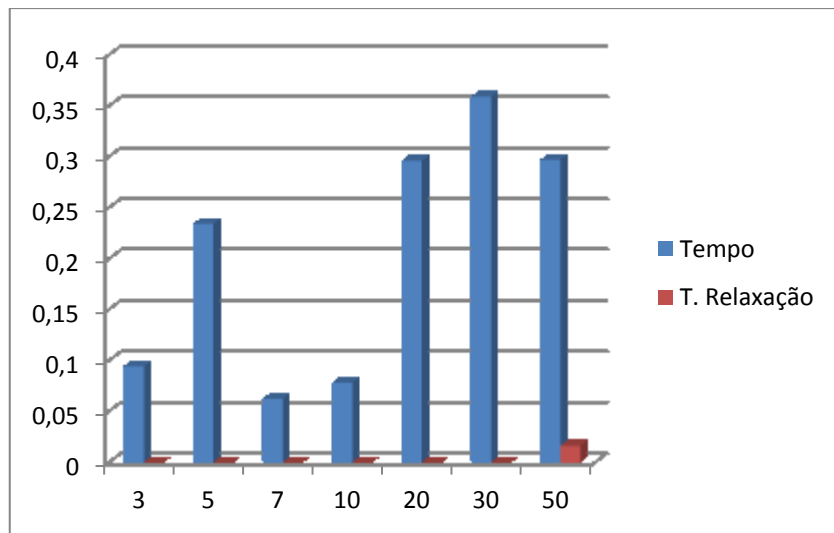


Gráfico 3 – Tempos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

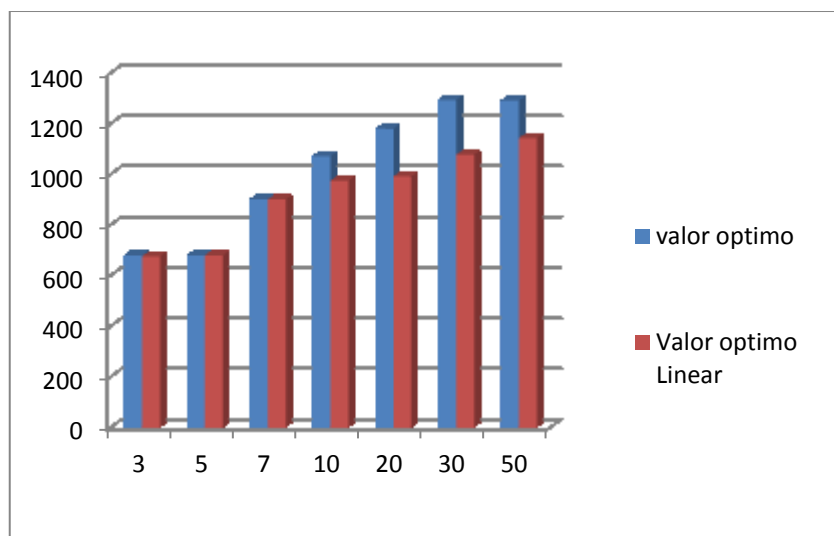


Gráfico 4 - Valores ótimos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 3 - Resultados para 30 nós com custos fixos usando o MRT1

30 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	157	0,062	157	0	1	0,00
5	241	0,063	241	0	2	0,00
7	241	0,078	241	0	2	0,00
10	555	0,406	555	0	2	0,00
20	633	0,156	552,154	0	3	12,77
30	633	0,53	588,5	0	3	7,03
50	490	0,343	490	0,015	3	0,00

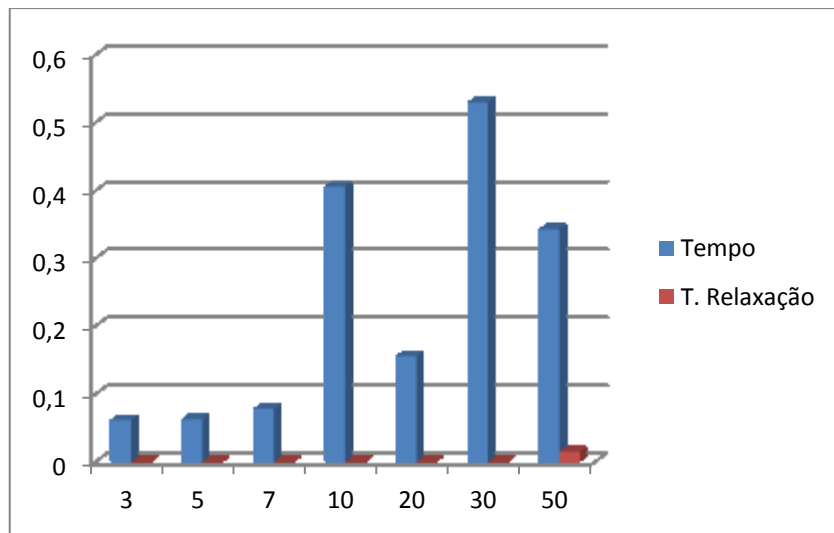


Gráfico 5 – Tempos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

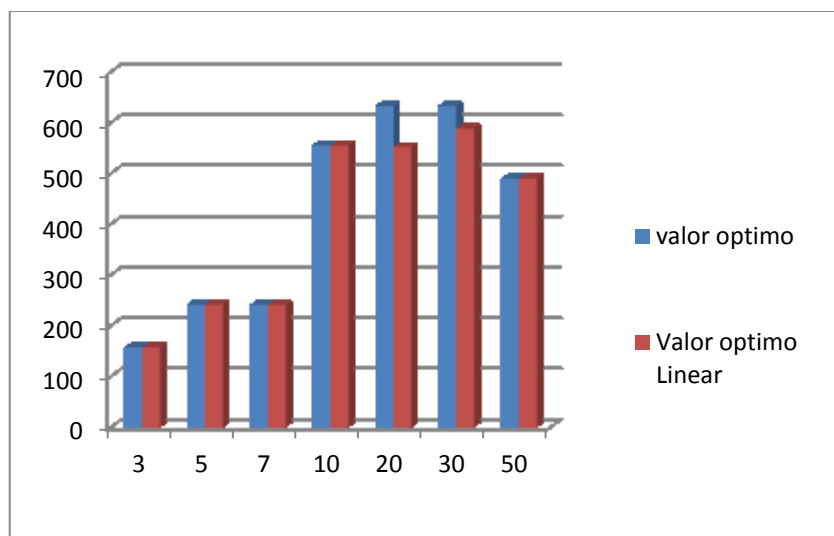


Gráfico 6 – Valores ótimos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 4 - Resultados para 50 nós com custos fixos usando o MRT1

50 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	195	0,125	186,5	0	2	4,36
5	156	0,141	156	0	1	0,00
7	248	0,094	232,5	0,016	2	6,25
10	228	0,14	228	0	2	0,00
20	309	0,156	257,667	0	2	16,61
30	360	0,53	275,5	0	2	23,47
50	361	0,343	291,5	0,016	3	19,25

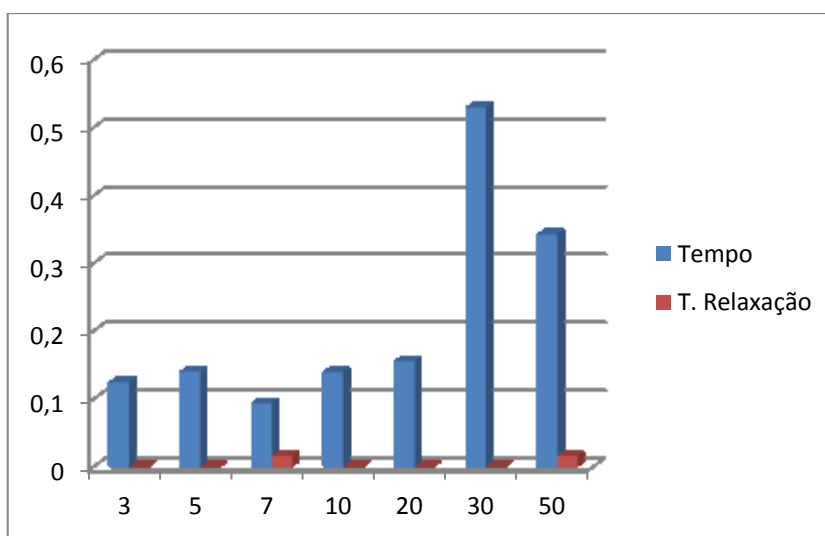


Gráfico 7 – Tempos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

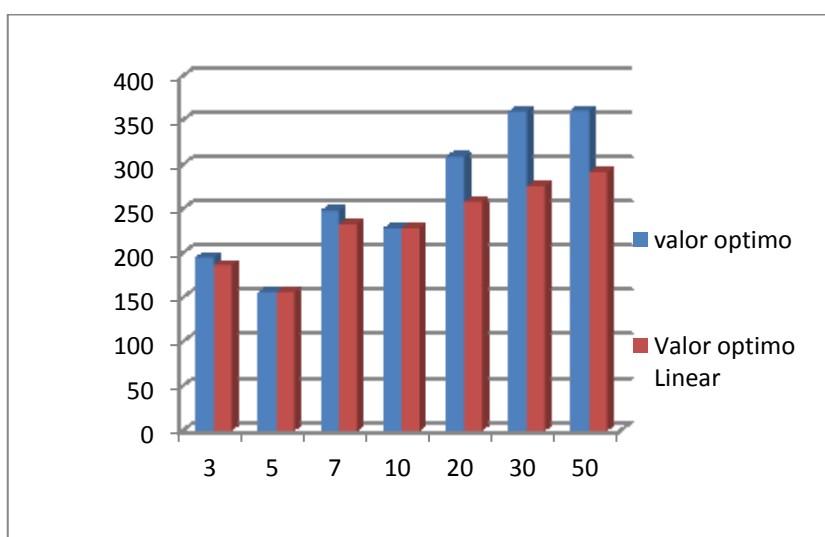


Gráfico 8 – Valores ótimos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 5 - Resultados para 60 nós com custos fixos usando o MRT1

60 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	184	0,328	184	0	1	0,00
20	279	0,203	276,5	0,016	2	0,90
30	363	1,28	261,167	0,047	3	28,05
50	260	0,858	260	0,016	2	0,00
70	366	0,717	322	0,015	3	12,02
100	435	6,068	337,125	0,234	3	22,50
120	498	8,128	362,4	0,25	3	27,23
150	363	1,919	361,8	0,047	3	0,33

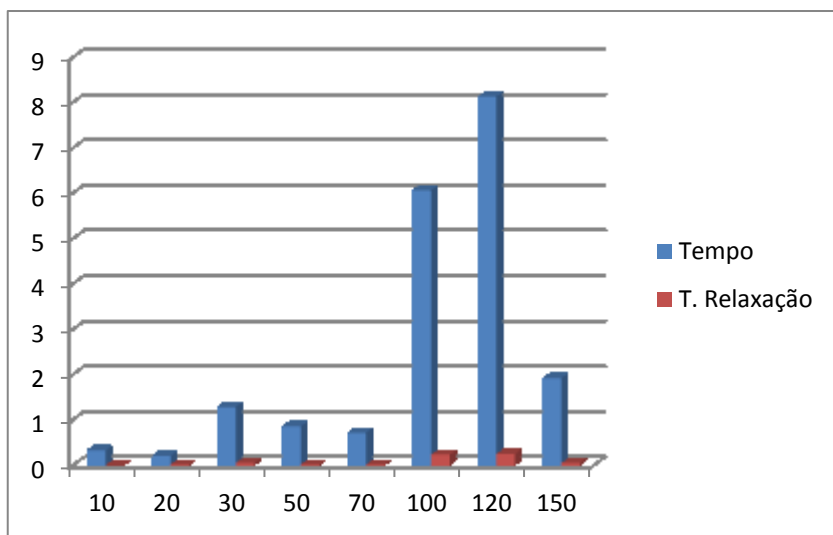


Gráfico 9 - Tempos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

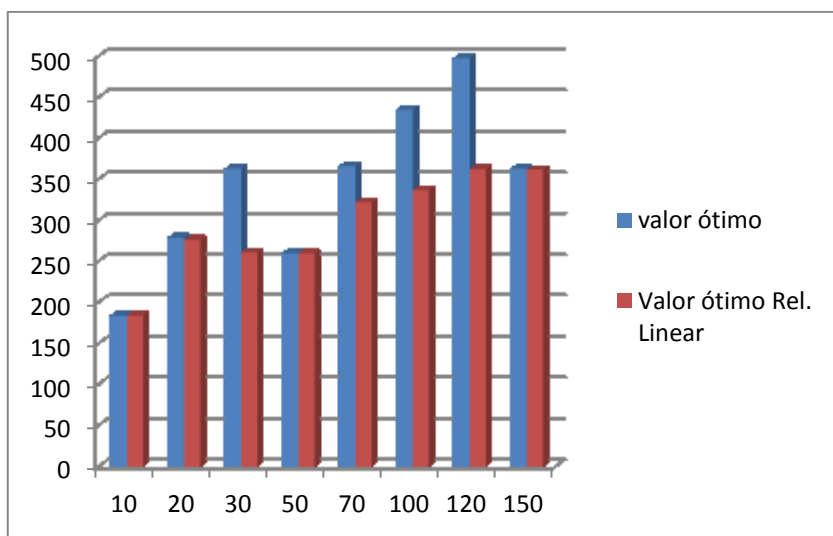


Gráfico 10 - Valores ótimos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

Tabela 6 - Resultados para 70 nós com custos fixos usando o MRT1

70 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	201	0,124	201	0	2	0,00
20	178	0,203	177	0	3	0,56
30	178	0,28	178	0,016	3	0,00
50	274	0,702	241,1	0,016	3	12,01
70	251	0,765	212	0,031	4	15,54
100	326	1,388	285,167	0,031	4	12,53
120	351	6,927	267,25	0,203	4	23,86
150	251	2,449	251	0,094	4	0,00

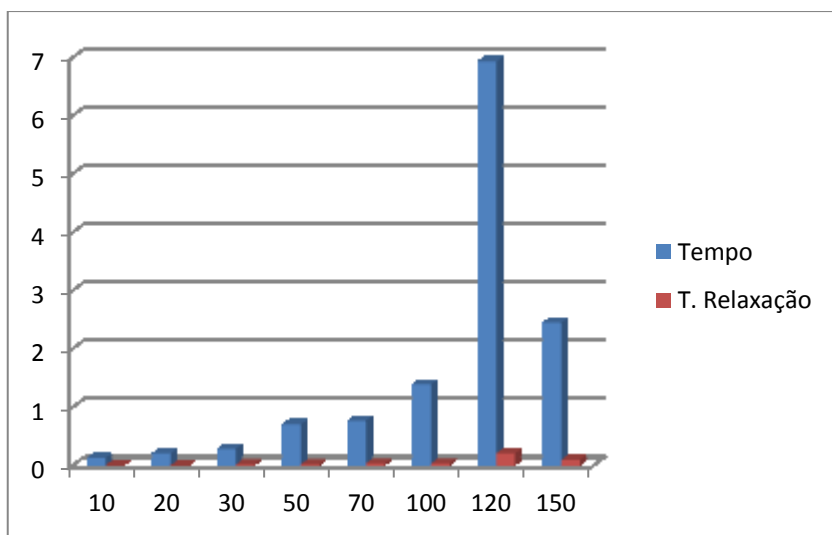


Gráfico 11 - Tempos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

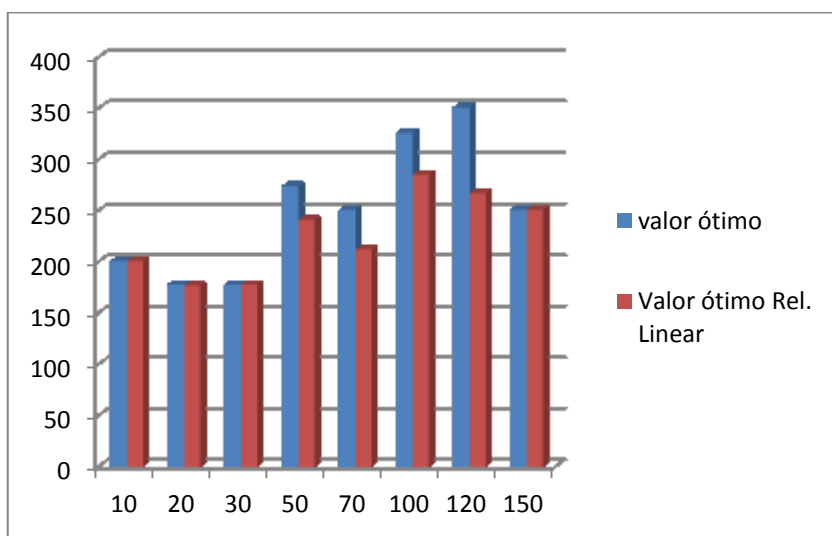


Gráfico 12 - Valores ótimos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

Tabela 7 - Resultados para 100 nós com custos fixos usando o MRT1

100 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	163	0,171	163	0	2	0,00
20	207	0,234	207	0,016	2	0,00
30	277	0,53	247,67	0,015	3	10,59
50	288	1,388	269,26	0,031	3	6,51
70	400	3,37	301,33	0,376	4	24,67
100	367	6,458	297,75	0,655	4	18,87
120	367	5,476	309,43	0,889	4	15,69
150	441	9,611	369,33	0,078	4	16,25
200	385	12,168	371,93	0,11	4	3,40

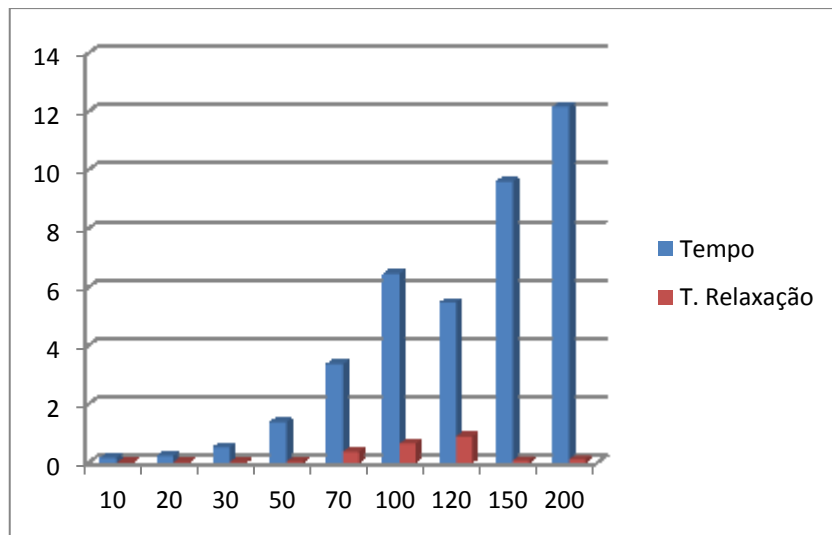


Gráfico 13 - Tempos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200

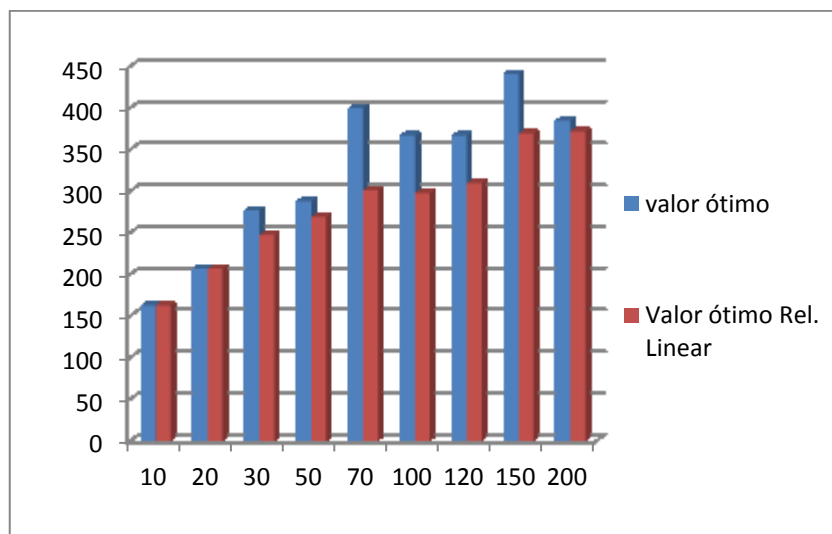


Gráfico 14 - Valores ótimos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

Tabela 8 - Resultados para 150 nós com custos fixos usando o MRT1

150 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
50	238	2,012	216,815	0,031	3	8,90
100	291	9,586	246	1,56	4	15,46
150	291	29,501	221,511	2,777	4	23,88
200	303	31,2	250,906	4,929	4	17,19
250	372	50,341	271,923	6,147	4	26,90
300	378	69,797	246,16	7,566	5	34,88
350	333	83,382	254,682	10,389	4	23,52

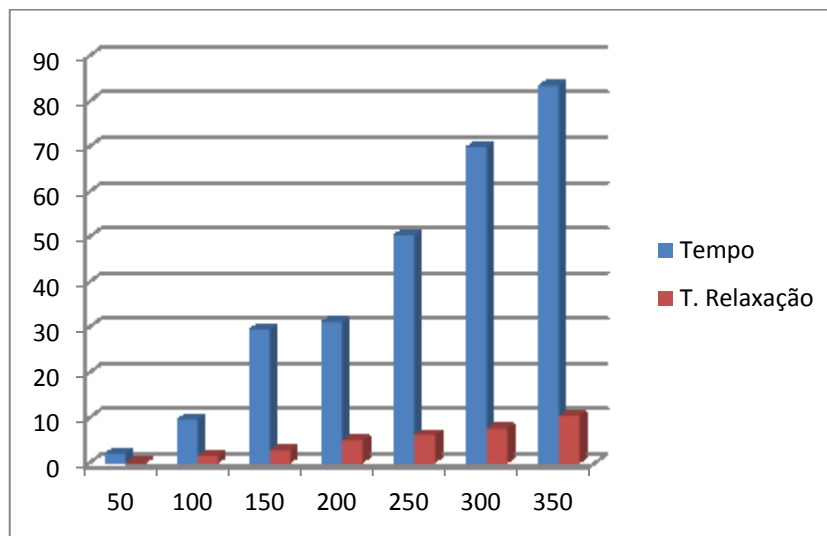


Gráfico 15 - Tempos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

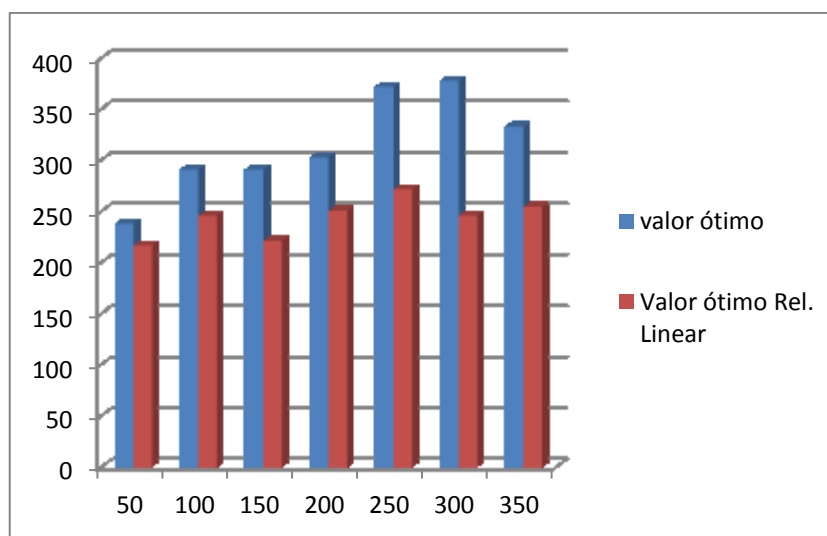


Gráfico 16 - Valores ótimos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

Tabela 9 - Resultados para 200 nós com custos fixos usando o MRT1

200 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
50	169	2,871	154	0,047	3	8,88
100	226	14,149	175,85	2,808	4	22,19
150	246	39,365	183,968	5,772	4	25,22
200	253	59,997	204,533	9,471	4	19,16
250	226	35,62	197,441	10,545	4	12,64
300	312	144,653	231,174	6,506	5	25,91
350	300	87,67	223,55	27,952	5	25,48
400	359	270,555	239,627	25,335	5	33,25
500	330	237,669	235,805	45,662	5	28,54
600	365	324,972	236,635	59,215	5	35,17

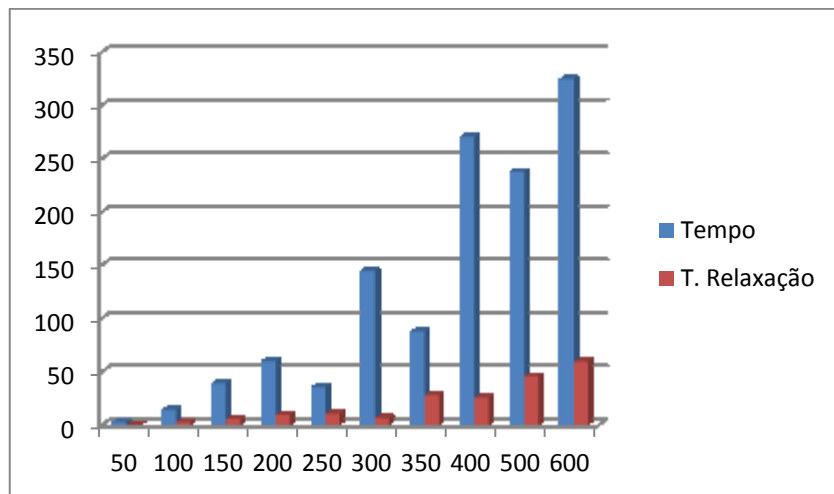


Gráfico 17 - Tempos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600

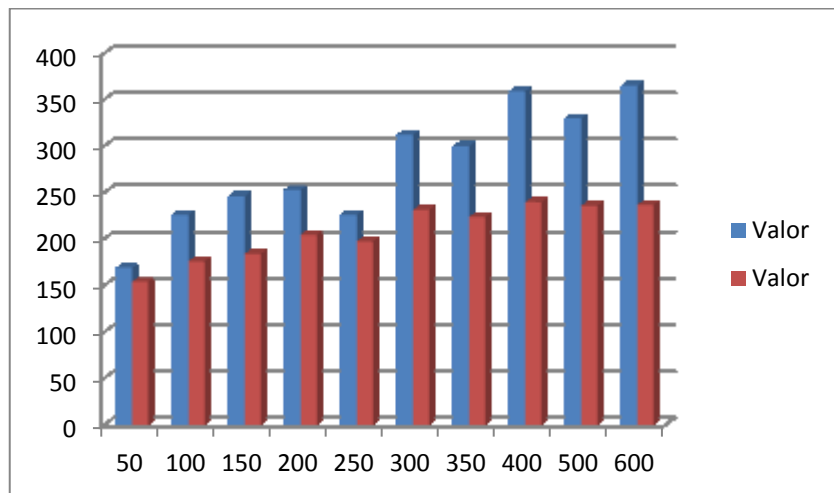


Gráfico 18- Valores ótimos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600

Passamos agora para os resultados obtidos para o modelo MRT1 em que as matrizes dos custos são diferentes para cada exemplo, tendo o número de nós e número de caminhos a mesma variação que nos resultados anteriores.

Na Tabela 10, 11 podemos verificar que encontramos alguns valores com GAP zero.

Na tabela 12, também se conseguiu encontrar valores ótimos com GAP igual a zero. Para 20 caminhos temos uma particularidade em que o número de dispositivos necessários instalar seria de 2 com um valor ótimo de 702, enquanto para 10 caminhos teríamos de instalar 3 com um valor ótimo mais baixo de 415. Esta particularidade deve-se ao fato dos custos serem gerados aleatoriamente e desta vez serem variáveis de exemplo para exemplo. É natural que os custos gerados para os 20 caminhos tenham sido mais elevados embora necessite instalar apenas de 2 dispositivos de monitorização.

Na Tabela 13, volta a surgir uma particularidade para 30 caminhos em que necessita de instalar 2 dispositivos de monitorização enquanto que para 20 caminhos necessita de instalar 3 dispositivos de monitorização.

Na Tabela 14 apenas encontramos um valor com GAP de zero mas que não existem particularidades, ou seja, à medida que vai aumentando o número de caminhos também vai aumentando o número de dispositivos que é necessário instalar.

Na Tabela 15 e 16, ainda encontramos valores de GAP zero, embora na Tabela 16 se encontrem mais uma vez particularidades. Para 100 nós com 100 caminhos necessitamos de 3 dispositivos com um custo de 400 enquanto que para 70 caminhos precisaríamos de 4 com um custo menor. Mais uma vez, pelo fato dos caminhos serem gerados independentemente uns dos outros e os custos gerados de forma aleatória e variável para cada exemplo.

A partir de 100 nós já não encontramos valores com GAP zero o que indica que estamos a trabalhar com problemas mais difíceis em que os GAP são mais elevados.

Nas tabelas a seguir normalmente quando o número de caminhos aumenta o número de nós necessários para monitorizar uma rede também aumenta e o respetivo custo (valor ótimo) também aumenta. Analisando os gráficos podemos referir que os tempos de execução do modelo linear inteiro são mais elevados do que os tempos usados no modelo da relaxação linear.

Quanto aos valores do gap podemos dizer que até aos 150 nós os valores eram relativamente baixos, tendo algumas exceções, rondando em média 15%, a partir desse número de nós os valores do gap começam a aumentar para uma média de 23%.

Tabela 10 - Resultados para 10 nós com custos variáveis usando o MRT1

10 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	180	0,08	180	0,018	1	0,00
5	686	0,074	686	0,001	1	0,00
7	468	0,087	448,5	0,001	2	4,17
10	579	0,134	545	0,001	2	5,87
20	1433	0,097	1255,33	0,002	2	12,40
30	487	0,07	487	0,002	2	0,00
50	848	0,251	791,25	0,003	3	6,69

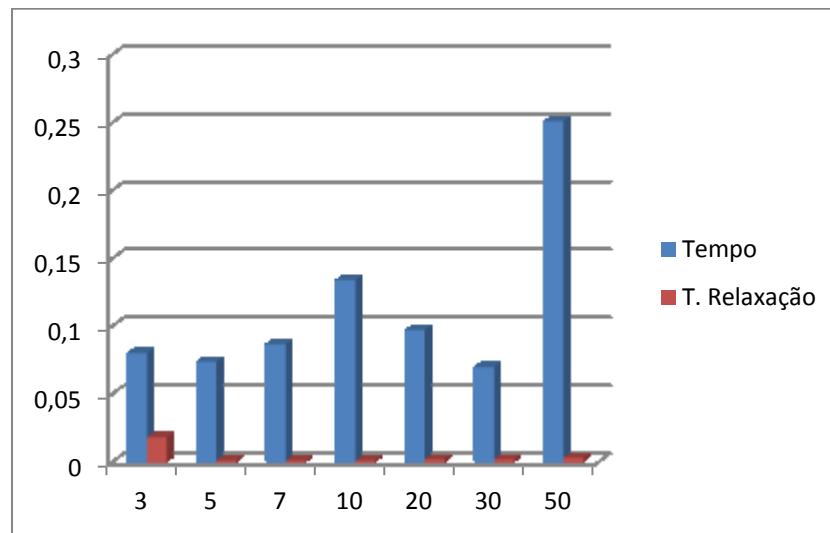


Gráfico 19 - Tempos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

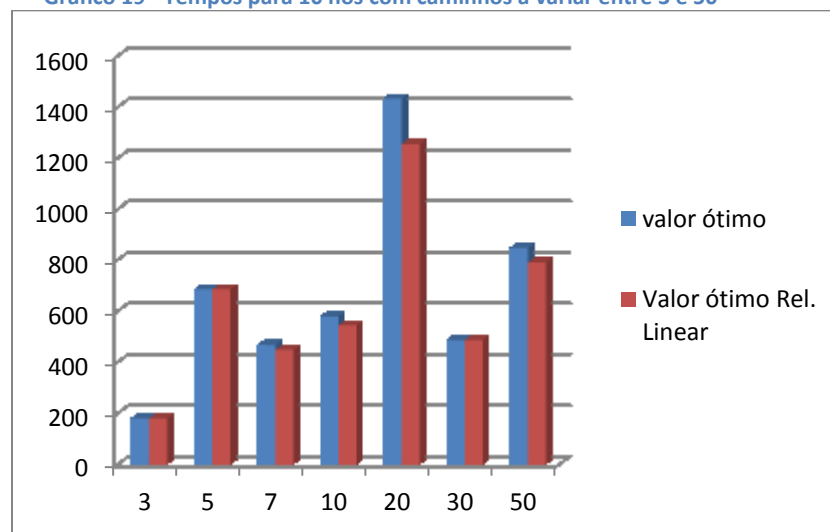


Gráfico 20 – Valores ótimos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 11 - Resultados para 20 nós com custos variáveis usando o MRT1

20 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	679	0,109	675,5	0,047	1	0,52
5	500	0,078	500	0,016	1	0,00
7	527	0,078	527	0	2	0,00
10	678	0,062	657	0	2	3,10
20	708	0,14	683,75	0	3	3,43
30	674	0,125	651,6	0	3	3,32
50	702	0,187	620,333	0,015	4	11,63

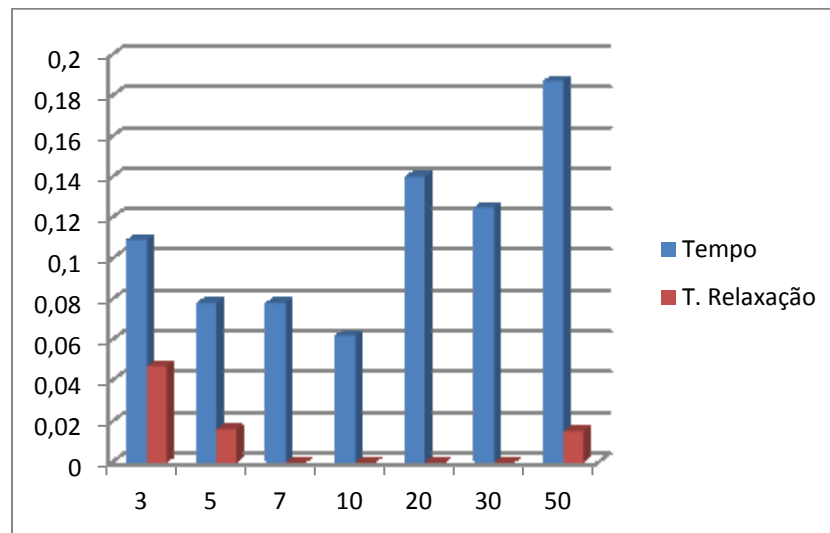


Gráfico 21 - Tempos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

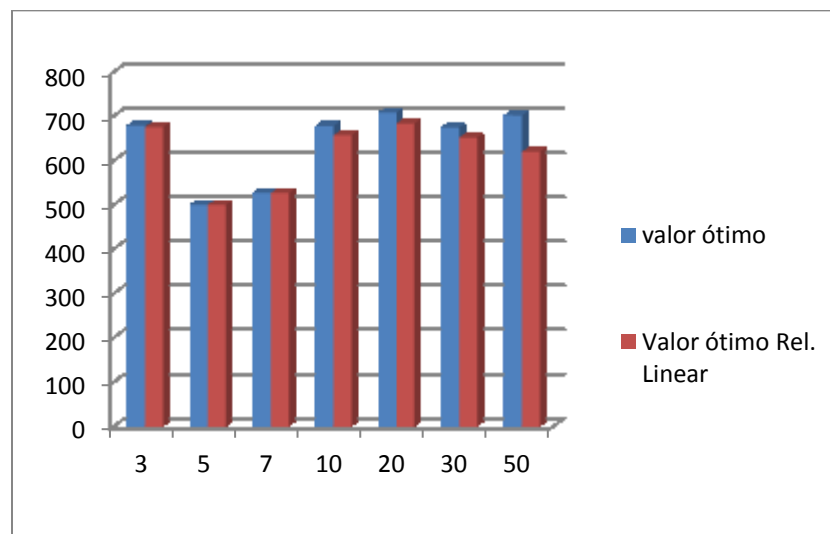


Gráfico 22 - Valores ótimos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 12 - Resultados para 30 nós com custos variáveis usando o MRT1

30 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	157	0,003	157	0	1	0,00
5	404	0,109	397	0	2	1,73
7	205	0,078	205	0	2	0,00
10	415	0,062	415	0	3	0,00
20	702	0,094	702	0	2	0,00
30	417	0,171	383	0	3	8,15
50	385	0,234	338,25	0,015	3	12,14

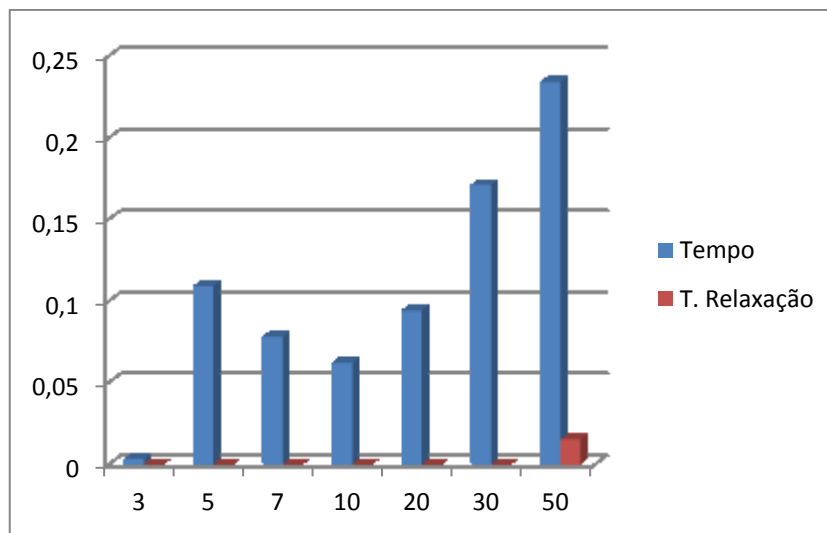


Gráfico 23 - Tempos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

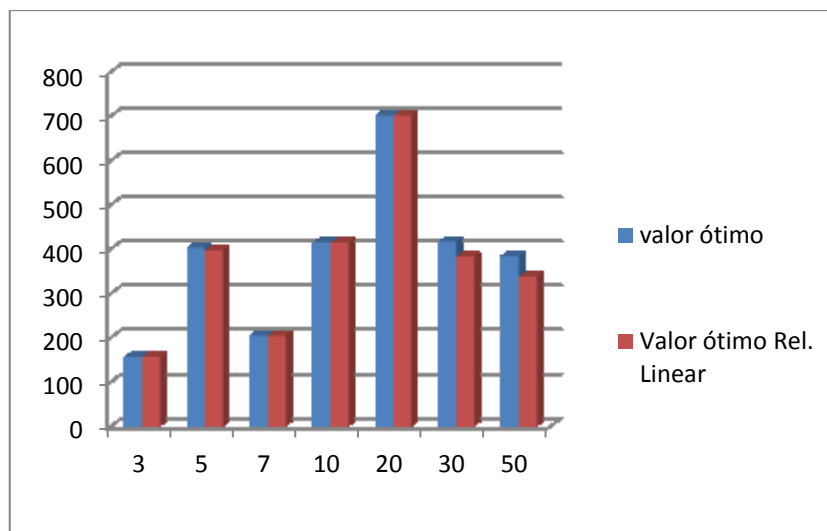


Gráfico 24 - Valores ótimos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 13 - Resultados para 50 nós com custos variáveis usando o MRT1

50 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	131	0,062	131	0	1	0
5	156	0,078	156	0	1	0
7	103	0,062	103	0,015	1	0
10	234	0,11	199	0	2	15
20	400	0,202	322,667	0	3	19,3
30	162	0,187	162	0,016	2	0
50	300	0,452	253,633	0,016	3	15,5

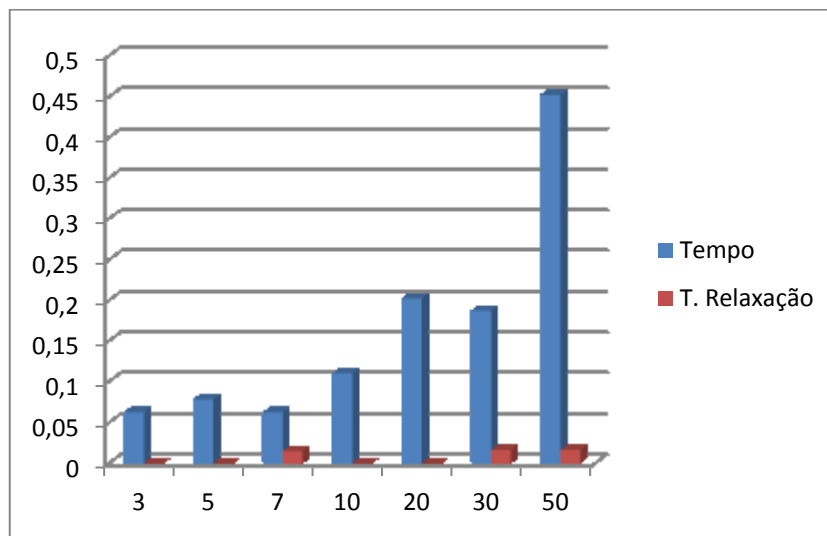


Gráfico 25 - Tempos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

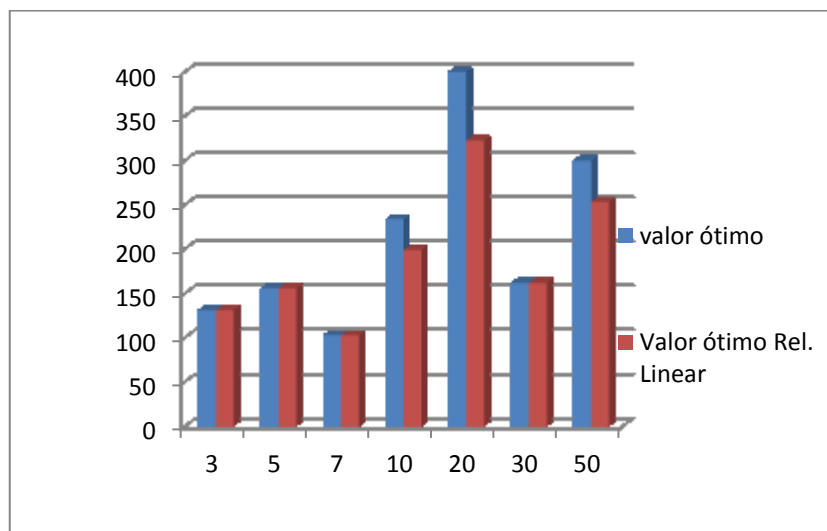


Gráfico 26 - Valores ótimos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 14 - Resultados para 60 nós com custos variáveis usando o MRT1

60 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	184	0,22	184	0,01	1	0,00
20	248	0,22	216	0,01	3	12,90
30	290	0,36	245,875	0,01	3	15,22
50	300	0,66	250,875	0,02	3	16,38
70	410	4,301	312,9	0,22	3	23,68
100	267	1,54	264,8	0,02	4	0,82
120	427	6,061	323,75	0,31	4	24,18
150	393	2,32	303,05	0,05	5	22,89

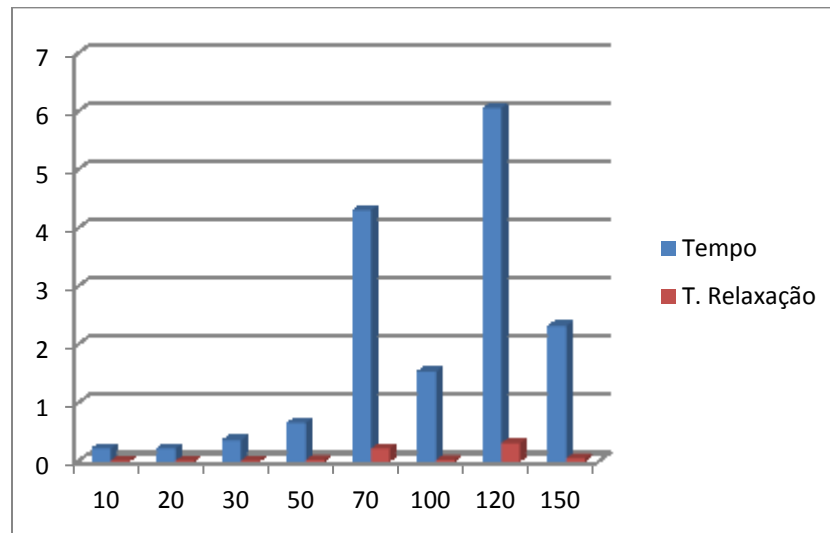


Gráfico 27 - Tempos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

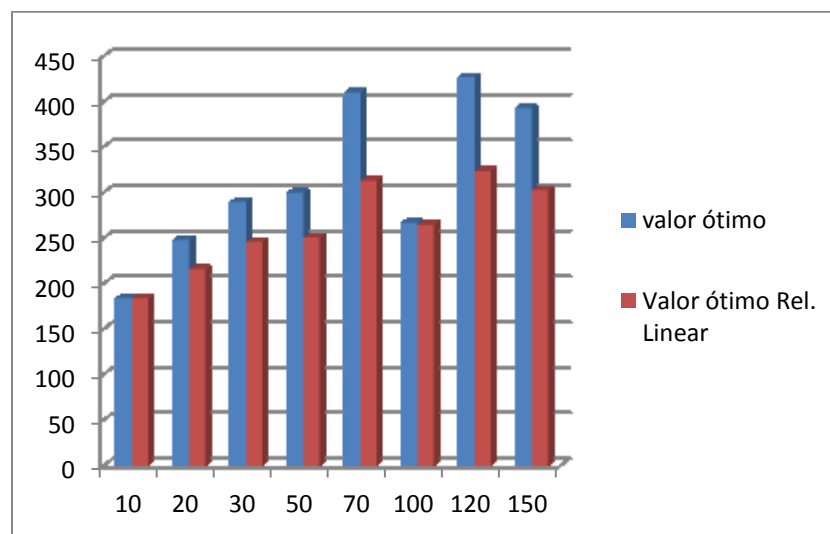


Gráfico 28 - Valores ótimos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

Tabela 15 - Resultados para 70 nós com custos variáveis usando o MRT1

70 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	201	0,23	201	0	2	0,00
20	308	0,27	272,25	0,01	2	11,61
30	239	0,71	195,667	0,06	3	18,13
50	238	0,63	234	0,02	3	1,68
70	248	0,51	248	0,02	3	0,00
100	397	1,991	321,333	0,04	4	19,06
120	467	6,132	391,143	0,51	4	16,24
150	479	7,461	394,375	0,56	4	17,67

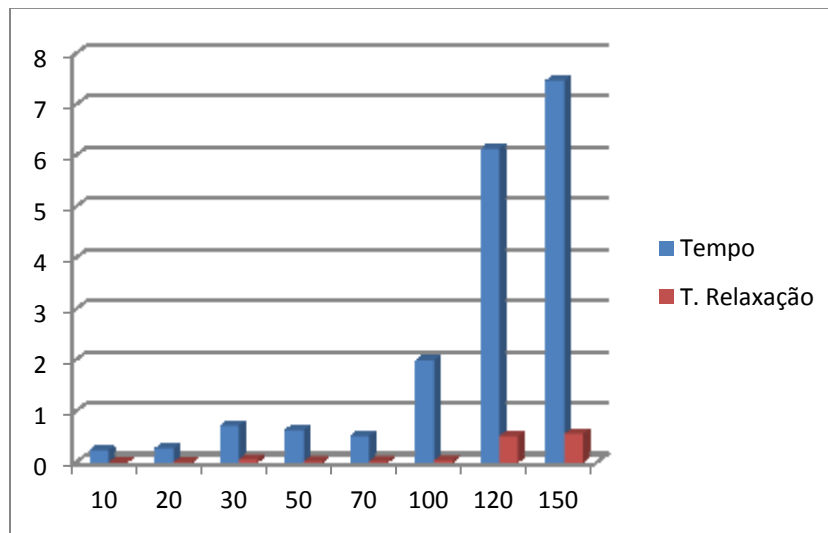


Gráfico 29 - Tempos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

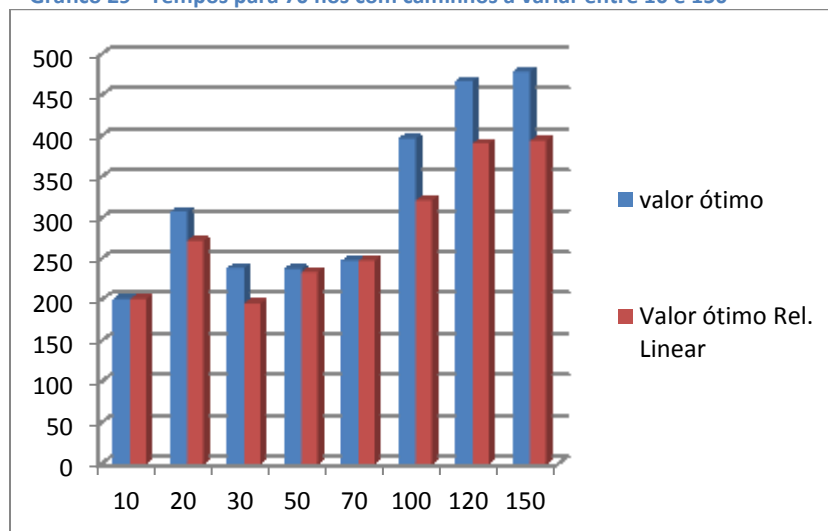


Gráfico 30 - Valores ótimos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

Tabela 16 - Resultados para 100 nós com custos variáveis usando o MRT1

100 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	163	0,17	163	0,01	2	0,00
20	268	0,36	223	0,01	3	16,79
30	265	0,32	265	0,01	3	0,00
50	246	0,69	246	0,03	3	0,00
70	337	1,51	292,714	0,03	4	13,14
100	400	5,88	331,769	0,751	3	17,06
120	421	6,491	349,742	0,85	4	16,93
150	309	4,19	304,2	0,07	3	1,55
200	397	11,513	340,333	1,742	4	14,27

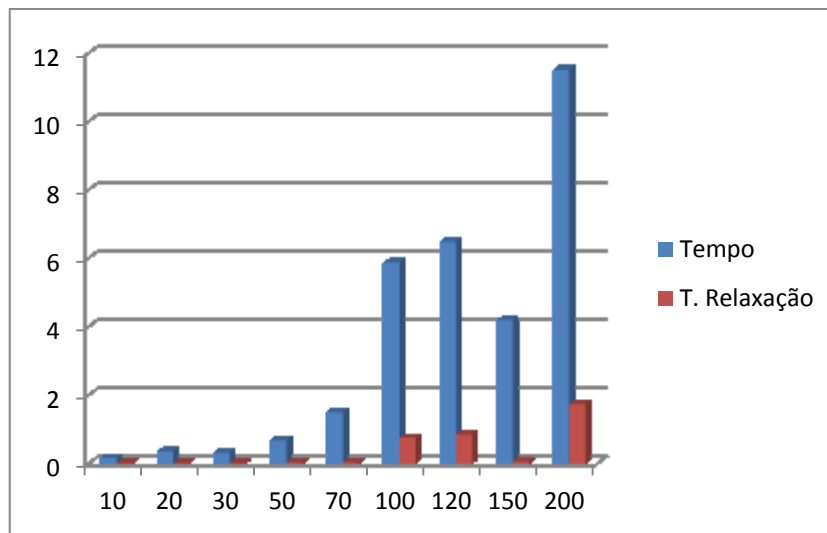


Gráfico 31 - Tempos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200

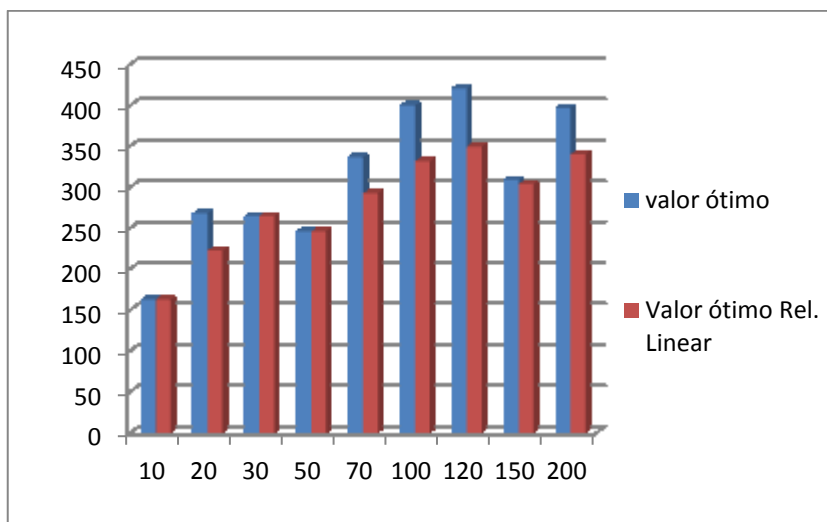


Gráfico 32 - Valores ótimos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200

Tabela 17 - Resultados para 150 nós com custos variáveis usando o MRT1

150 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
50	238	2,15	216,815	0,03	3	8,90
100	246	8,301	194,75	1,211	4	20,83
150	236	17,603	189,667	0,15	4	19,63
200	272	42,742	216,286	4,052	4	20,48
250	329	59,498	237,914	6,116	5	27,69
300	318	44,796	232,133	4,601	4	27,00
350	341	74,506	260,619	9,573	5	23,57

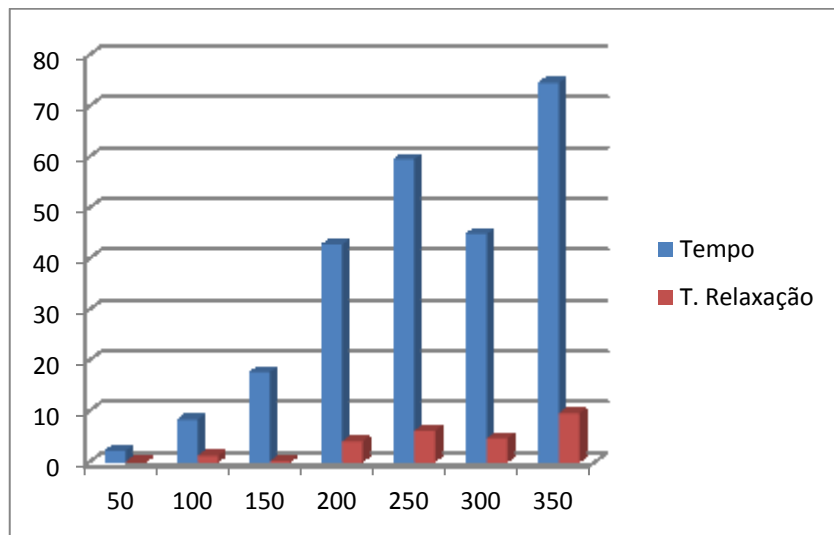


Gráfico 33 - Tempos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

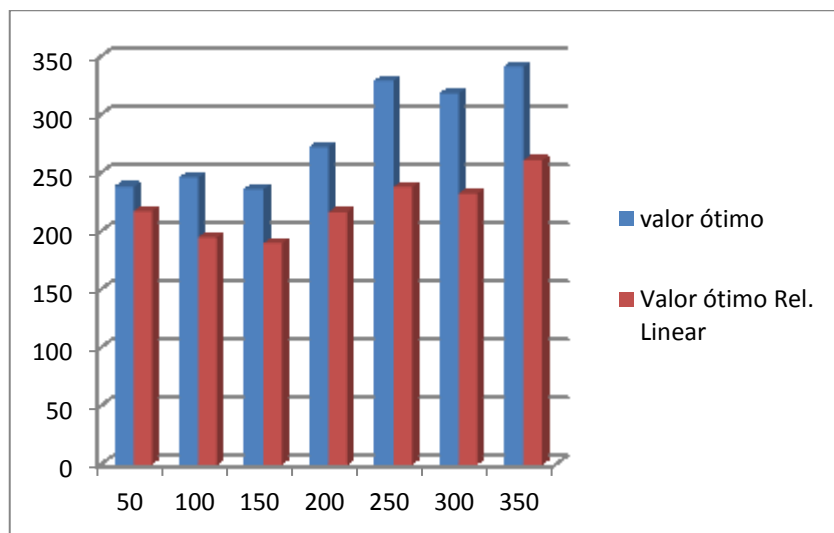


Gráfico 34 - Valores ótimos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

Tabela 18 - Resultados para 200 nós com custos variáveis usando o MRT1

200 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
50	169	2,18	154	0,06	3	8,88
100	229	19,022	185,037	2,6	4	19,20
150	258	33,387	193,333	4,621	4	25,06
200	280	51,062	212,886	8,651	4	23,97
250	252	93,271	199,253	12,344	4	20,93
300	289	122,772	211,278	17,085	4	26,89
350	316	199,58	231,627	19,786	5	26,70
400	321	187,855	223,325	27,961	5	30,43
500	267	239,377	179,318	36,566	4	32,84
600	344	314,689	239,971	46,569	5	30,24

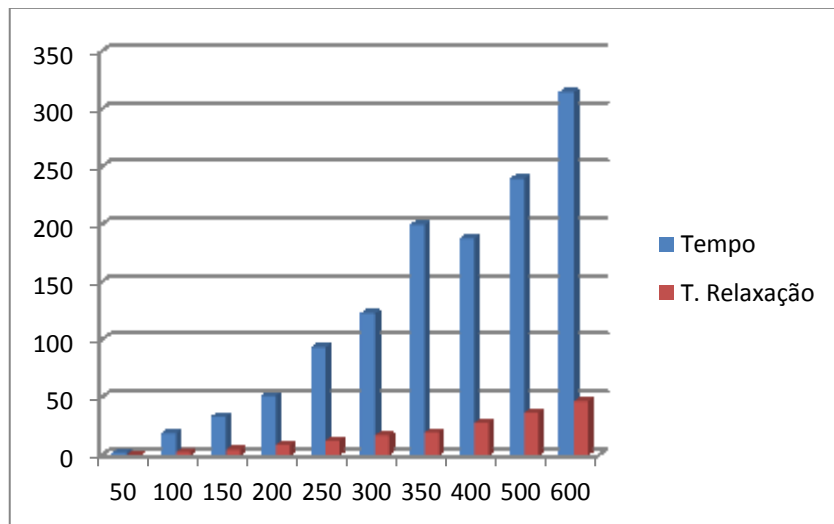


Gráfico 35 - Tempos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600

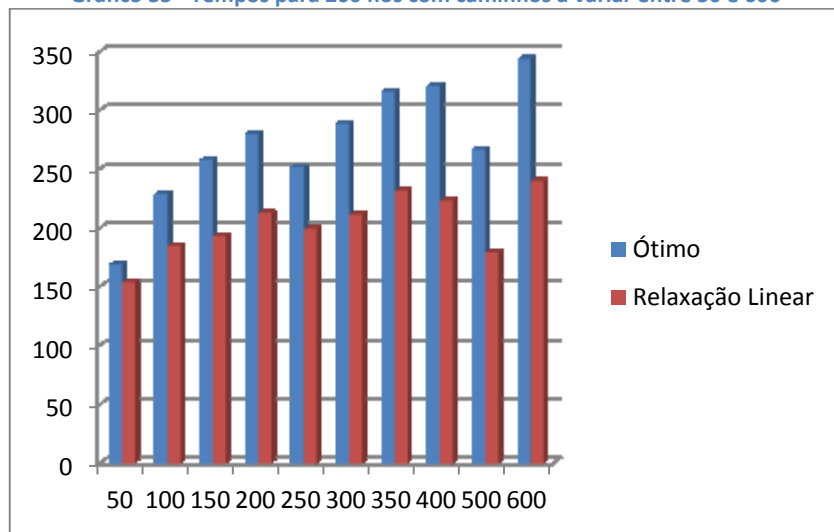


Gráfico 36 - Valores ótimos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

Apresentamos agora os resultados da formulação MRT2 para o número de nós a variar entre 10 e 200, número de caminhos a variar entre 3 e 600. Consideramos também que o custo de instalação de um monitor é fixo para todos os exemplos, ou seja, para todas as linhas da tabela. O limite de caminhos que determinado dispositivo de monitorização pode monitorizar é variável entre 1 e o número de caminhos em cada exemplo. Ou seja, para o primeiro exemplo, temos que cada nó poderá monitorizar no máximo de 1 a 3 caminhos. No segundo exemplo, cada nó poderá monitorizar no máximo de 1 a 5 caminhos.

É de referir que com esta formulação quase nunca se obtém o GAP igual a zero, ou seja, o problema é muito difícil de resolver. Os GAP tornam-se muito elevados desde o primeiro exemplo.

Na tabela 19, para 10 nós tanto para 5 caminhos, 7 caminhos como para, 10 ou 20 caminhos encontramos o mesmo valor ótimo. Uma vez que os custos são fixos para todos os exemplos e o limite m ter sido gerado aleatoriamente entre 1 e o número de caminhos em causa é natural que o número de monitores e o valor ótimo seja o mesmo. Acontece o mesmo em quase todas as tabelas com exceção da última tabela. Encontramos esta particularidade no decorrer das tabelas com exceção da última por esta ter um intervalo maior nos exemplos do número de caminhos.

Nesta formulação em quase todas as tabelas à medida que vai aumentando o número de caminhos também aumenta o número de dispositivos de monitorização. Temos algumas exceções que é o caso que se verifica na Tabela 20, em que para 30 caminhos necessitaríamos de 4 monitores quanto que para 50 caminhos apenas precisaríamos de instalar 3 dispositivos de monitorização. Na Tabela 22, isso também se verifica para 20 caminhos em que é necessário instalar 3 dispositivos de monitorização enquanto que para 30 caminhos seriam necessários 2 dispositivos de monitorização. Também na tabela 24, temos que, para 100 caminhos há necessidade de instalar 4 dispositivos de monitorização enquanto que para 120 caminhos apenas precisaríamos de 3 dispositivos de monitorização. Na Tabela 25, para 20 caminhos necessitaríamos de 3

dispositivos de monitorização enquanto para 30 caminhos apenas precisaríamos de 2 dispositivos de monitorização.

Quanto aos tempos podemos verificar que são baixos nas primeiras tabelas, começando a aumentar a partir de 100 nós. Em média até aos 100 nós o tempo de calcular o valor ótimo rondava os 3 segundos. A partir dos 100 nós verifica-se um aumento mais significativo em que chega a atingir aproximadamente 250 segundos.

Relativamente aos GAP, também verificamos que vão aumentando muito à medida que o número de caminhos aumenta.

Tabela 19 - Resultados para 10 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2

10 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	705	0,171	451	0	2	36,03
5	520	0,078	339,067	0	2	34,79
7	520	0,047	379,667	0	2	26,99
10	520	0,187	326,583	0,015	2	37,20
20	520	0,062	244,296	0	2	53,02
30	1062	0,156	379,528	0	3	64,26
50	1732	1,482	582,864	0	3	66,35

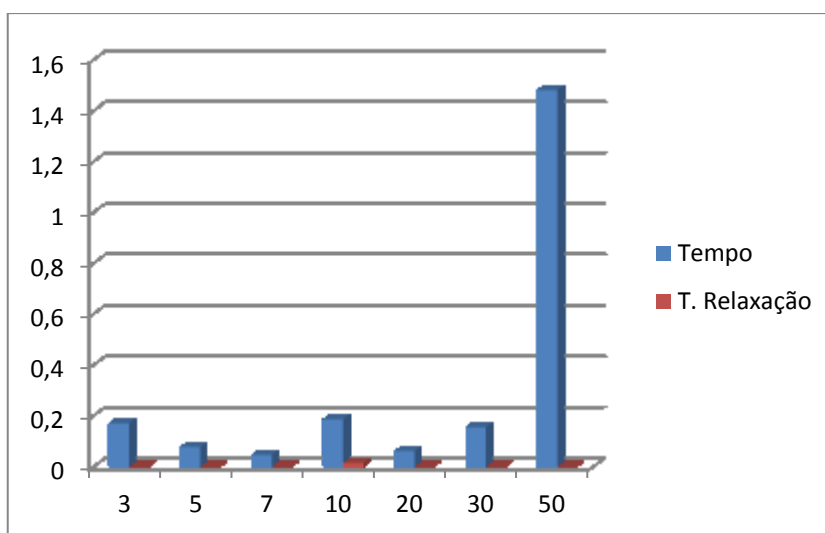


Gráfico 37 - Tempos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

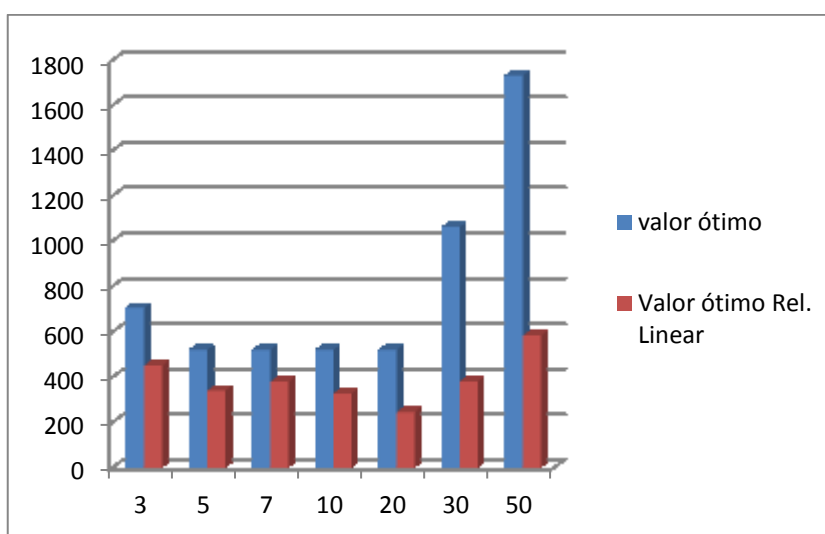


Gráfico 38- Valores ótimos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 20 - Resultados para 20 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2

20 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	190	0,078	190	0,016	2	0,00
5	190	0,062	106,75	0	2	43,82
7	533	0,062	204,31	0	2	61,67
10	413	0,063	163,944	0	3	60,30
20	413	0,078	108,55	0	3	73,72
30	934	1,607	341,979	0,016	4	63,39
50	656	0,484	169,538	0	3	74,16

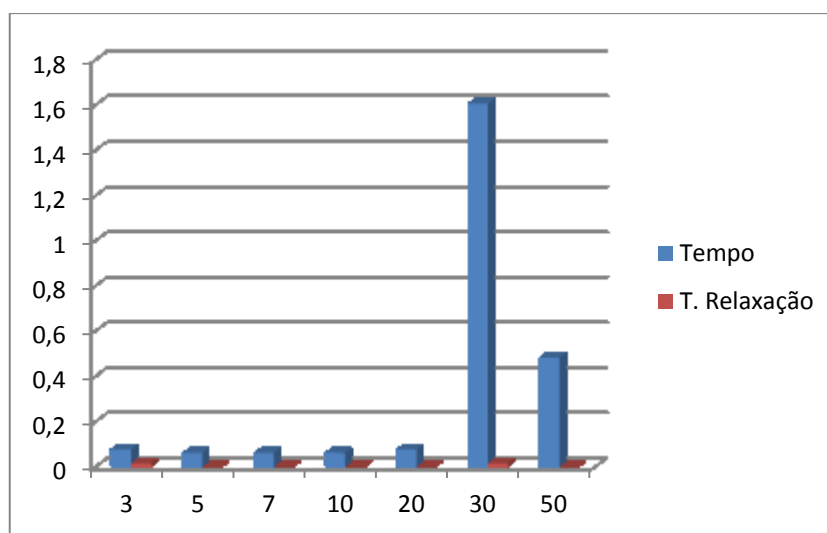


Gráfico 39 - Tempos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

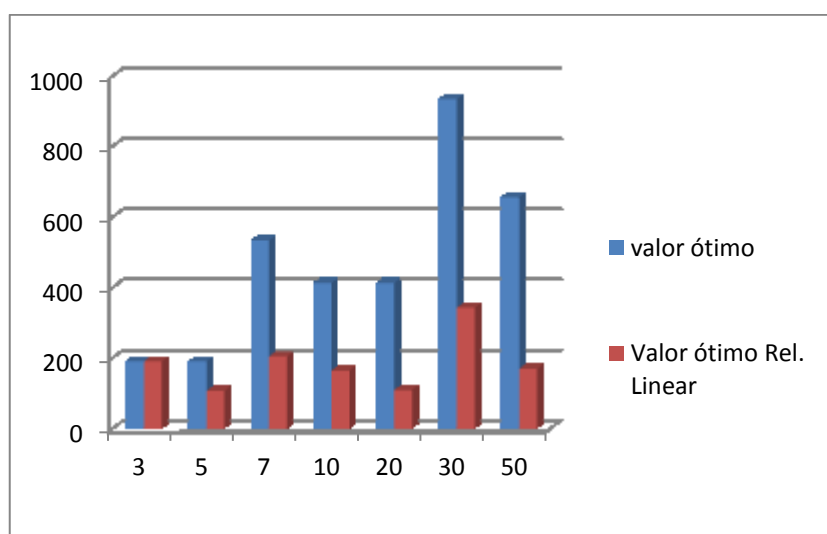


Gráfico 40 - Valores ótimos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 21 - Resultados para 30 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2

30 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	350	0,093	214,667	0,016	2	38,67
5	350	0,125	273	0	2	22,00
7	350	0,063	300,857	0	2	14,04
10	536	0,374	250,119	0,016	2	53,34
20	551	1,092	237,059	0	3	56,98
30	558	1,108	254,739	0,016	3	54,35
50	587	2,277	296,813	0	3	49,44

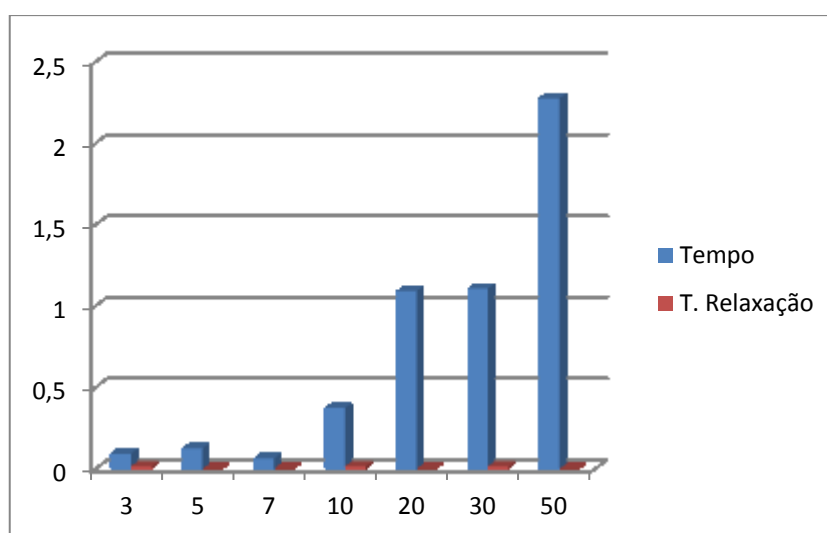


Gráfico 41- Tempos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

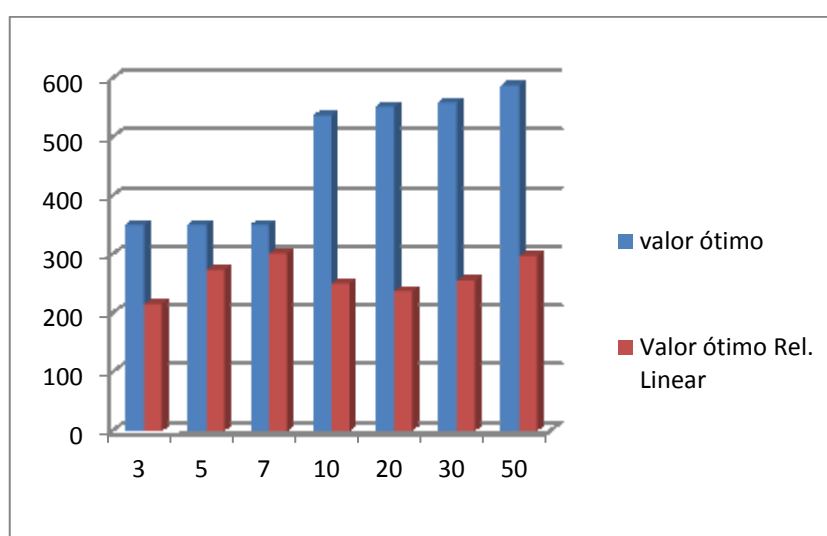


Gráfico 42 - Valores ótimos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 22 - Resultados para 50 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2

50 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	248	0,109	198,5	0	2	19,96
5	248	0,078	149,267	0	2	39,81
7	248	0,327	154,233	0	2	37,81
10	270	0,171	188,794	0	2	30,08
20	525	1,232	186,065	0	3	64,56
30	404	1,435	161,695	0	2	59,98
50	441	2,09	156,504	0,032	3	64,51

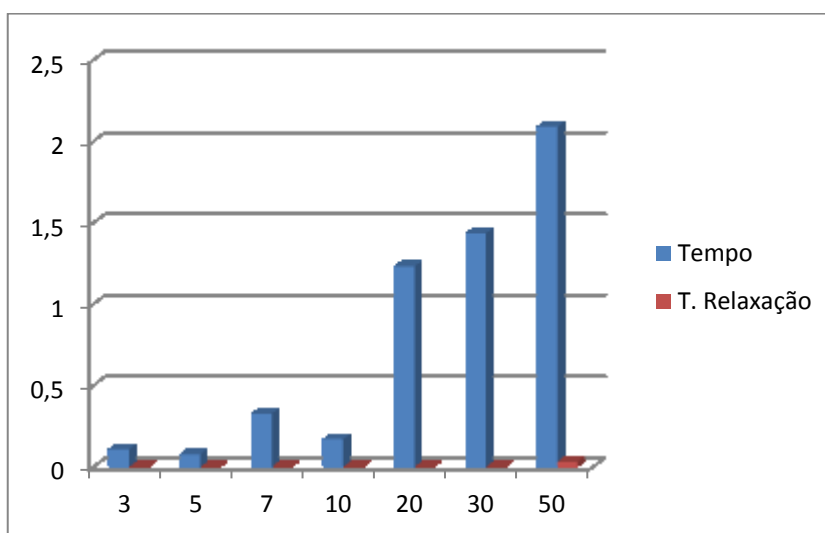


Gráfico 43- Tempos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

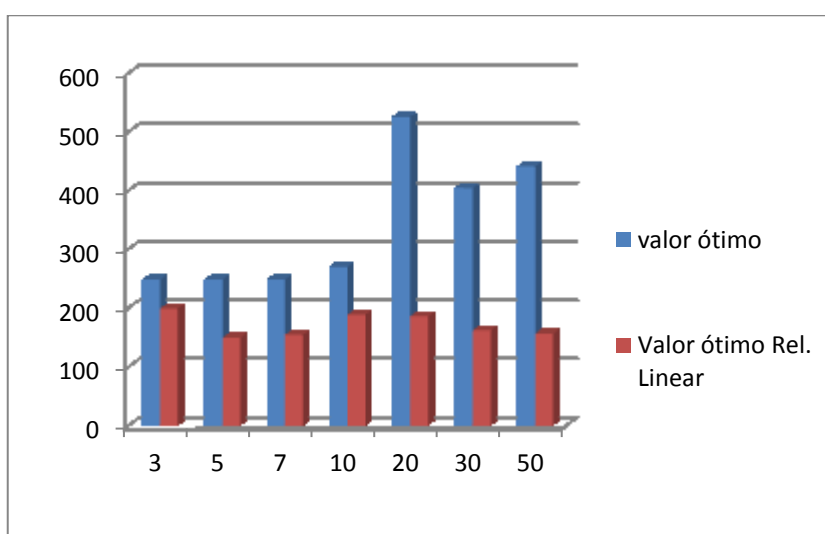


Gráfico 44- Valores ótimos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 23 - Resultados para 60 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2

60 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	237	0,362	151,635	0,002	2	36,02
20	249	0,801	102,341	0,008	3	58,90
30	254	0,824	151,533	0,013	3	40,34
50	254	0,42	116,561	0,007	3	54,11
70	325	1,55	113,57	0,037	3	65,06
100	446	4,303	204,362	0,04	4	54,18
120	376	2,376	101,241	0,053	4	73,07
150	447	6,59	132,826	0,052	4	70,29

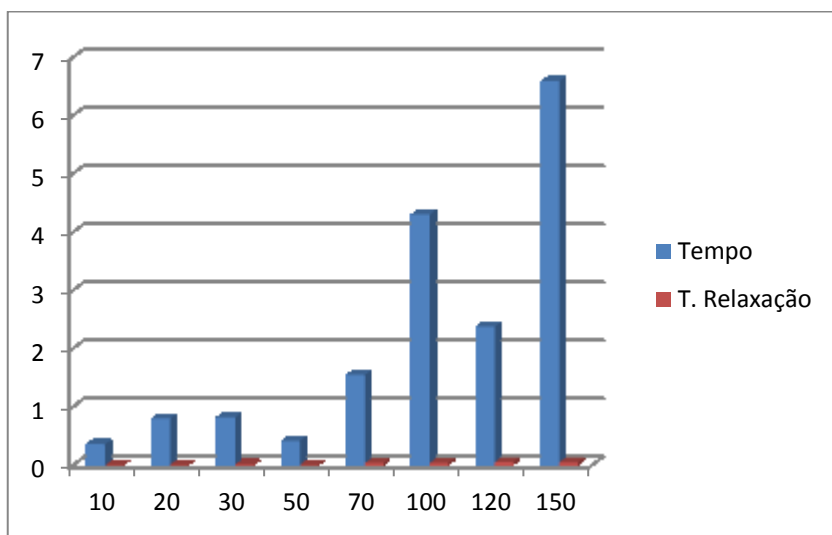


Gráfico 45 - Tempos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

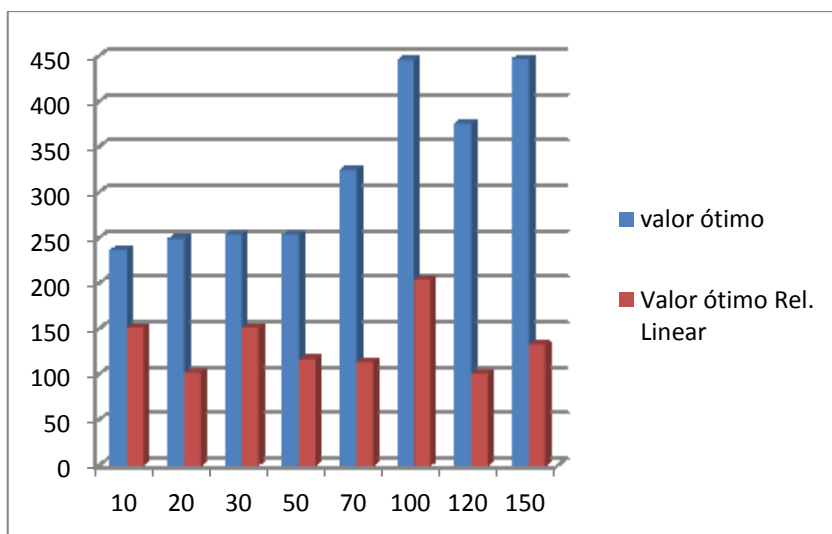


Gráfico 46- Valores ótimos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

Tabela 24 - Resultados para 70 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2

70 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	147	0,134	90,2222	0,003	2	38,62
20	214	0,298	129,567	0,003	2	39,45
30	312	2,25	119,815	0,017	3	61,60
50	396	3,227	163,097	0,024	3	58,81
70	427	2,618	139,377	0,038	4	67,36
100	427	4,523	114,301	0,06	4	73,23
120	350	2,791	142,601	0,078	3	59,26
150	445	7,502	203,892	0,083	4	54,18

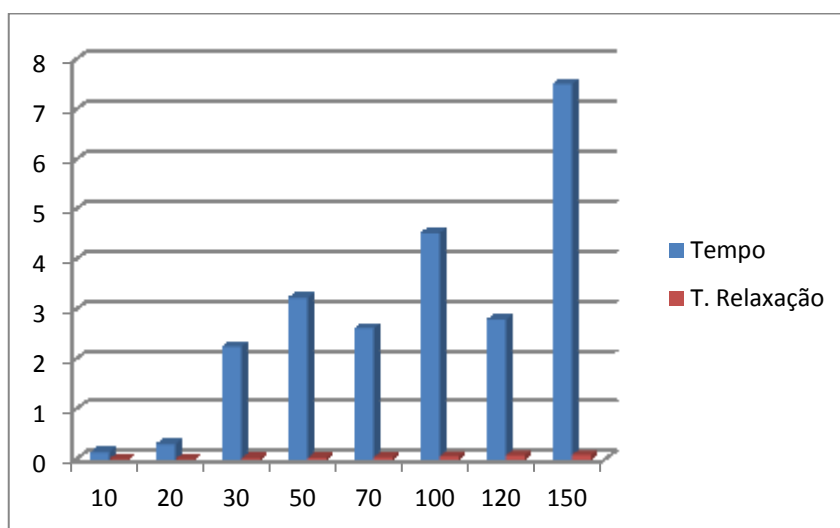


Gráfico 47 - Tempos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

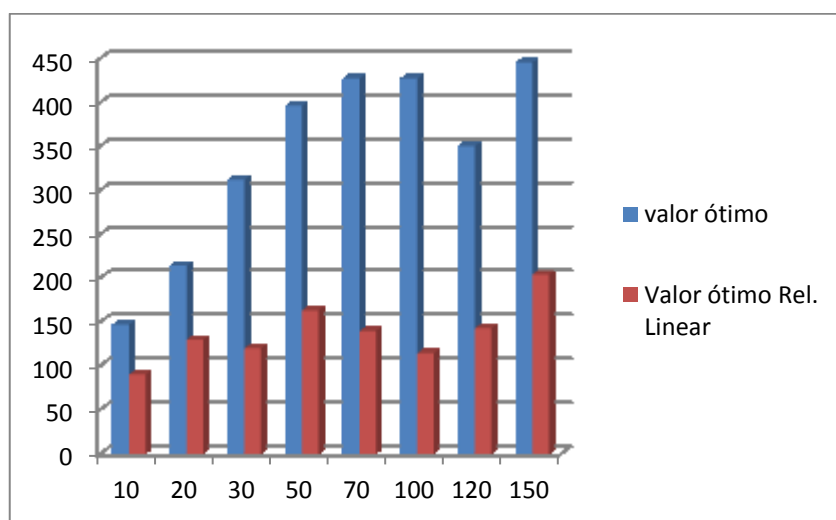


Gráfico 48- Valores ótimos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

Tabela 25 - Resultados para 100 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2

100 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	159	0,141	72,508	0,016	2	54,40
20	273	0,192	144,09	0,006	3	47,22
30	172	0,227	133,1	0,015	2	22,62
50	217	0,506	84,408	0,011	3	61,10
70	390	2,474	100,7	0,063	4	74,18
100	331	3,136	80,405	0,094	4	75,71
120	407	4,666	97,829	0,109	5	75,96
150	407	4,815	80,296	0,142	5	80,27
200	490	15,865	97,643	0,14	5	80,07

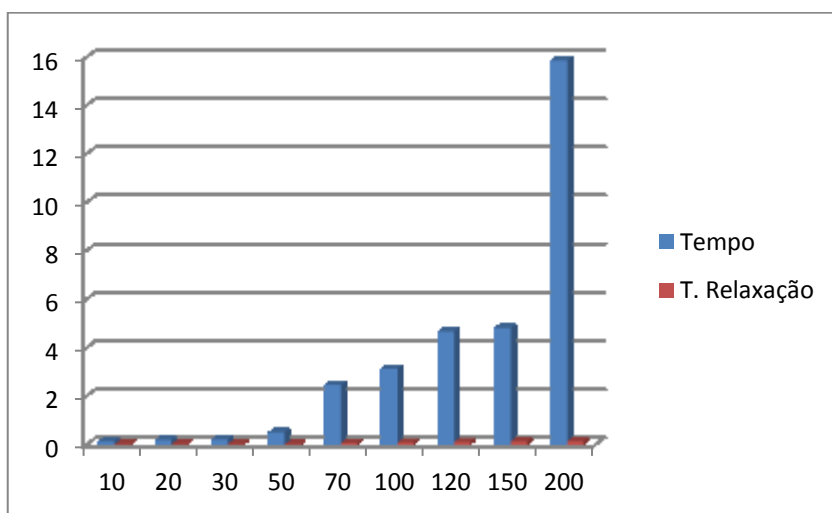


Gráfico 49- Tempos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200

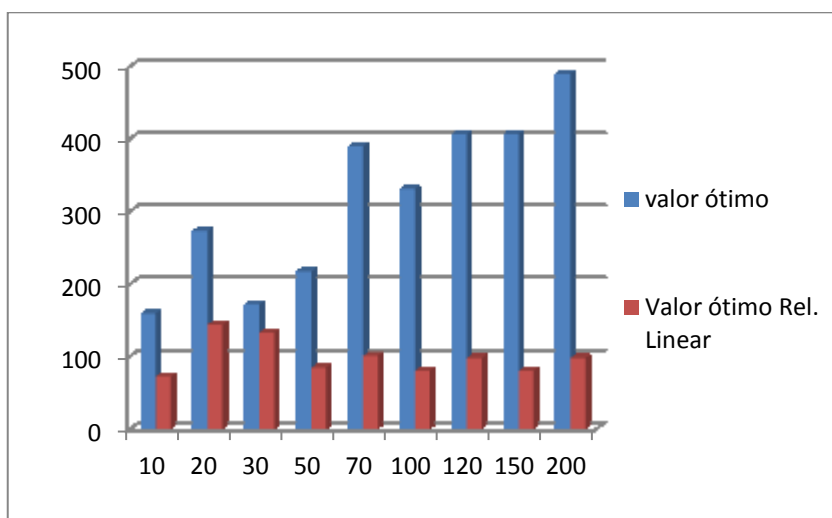


Gráfico 50 - Valores ótimos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200

Tabela 26 - Resultados para 150 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2

150 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
50	265	2,122	127,124	0,0,93	3	52,03
100	406	6,165	125,371	0,171	4	69,12
150	432	17,417	100,293	0,249	4	76,78
200	432	14,784	107,058	0,406	4	75,22
250	423	45,114	128,36	0,385	4	69,65
300	529	73,018	175,904	0,62	4	66,75
350	496	25,213	127,37	0,702	5	74,32

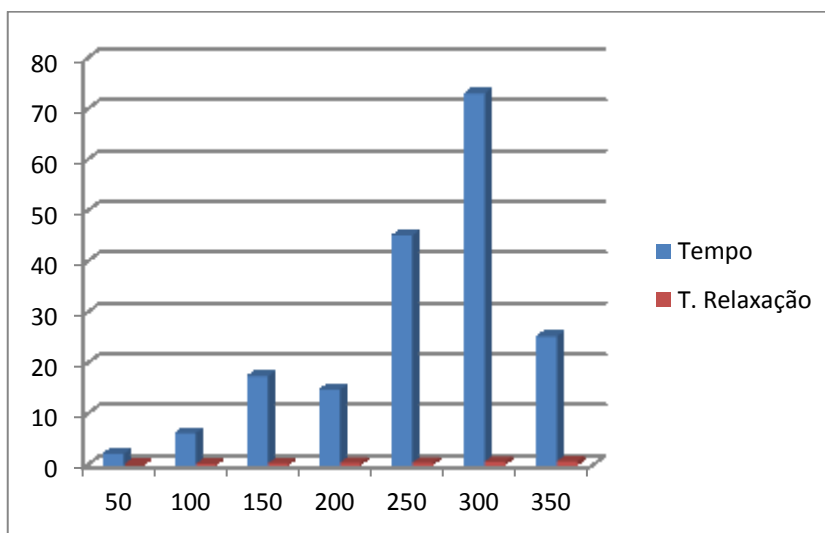


Gráfico 51 - Tempos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

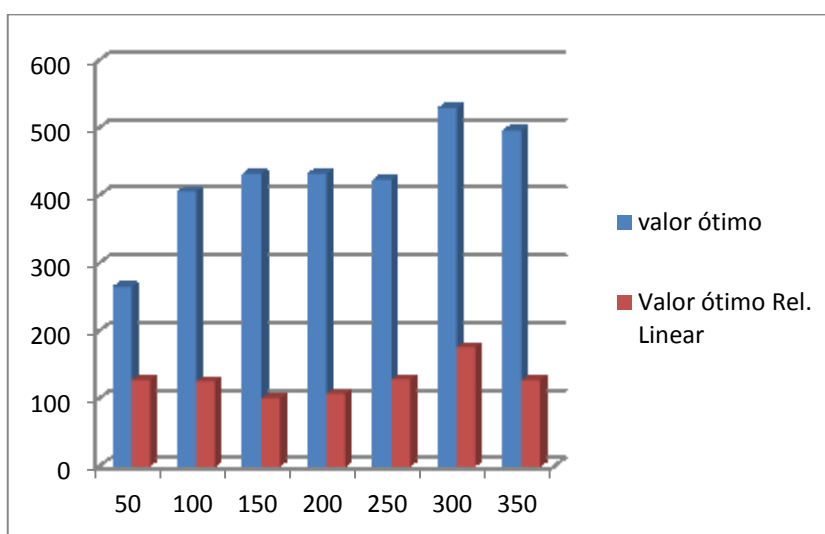


Gráfico 52 - Valores ótimos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

Tabela 27 - Resultados para 200 nós com custos fixos e m variável usando o MRT2

200 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
50	230	4,866	146,72	0,085	3	36,2
100	289	12,438	89,8743	0,241	4	68,9
150	274	14,461	131,641	0,361	4	52
200	295	26,584	86,4268	0,456	4	70,7
250	348	54,224	67,3735	0,817	5	80,6
300	348	49,004	72,3752	1,149	5	79,2
350	348	33,579	95,103	1,141	5	72,7
400	375	249,521	111,364	1,825	5	70,30
500	348	83,881	71,0218	1,778	5	79,59
600	359	188,174	131,68	2,449	5	63,32

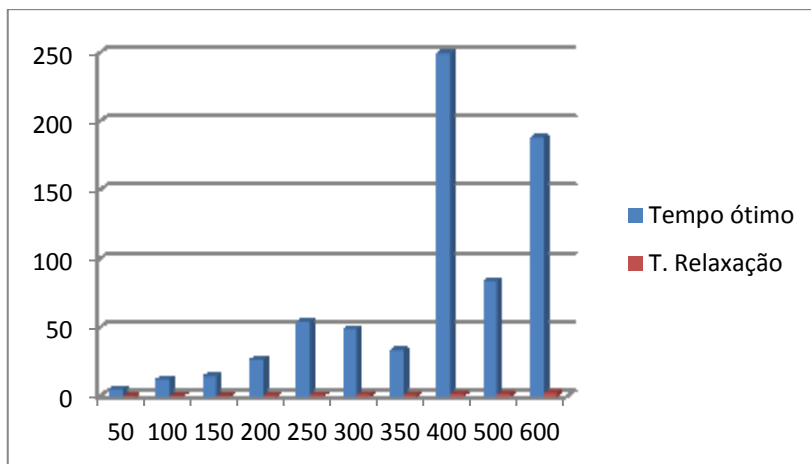


Gráfico 53 - Tempos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600

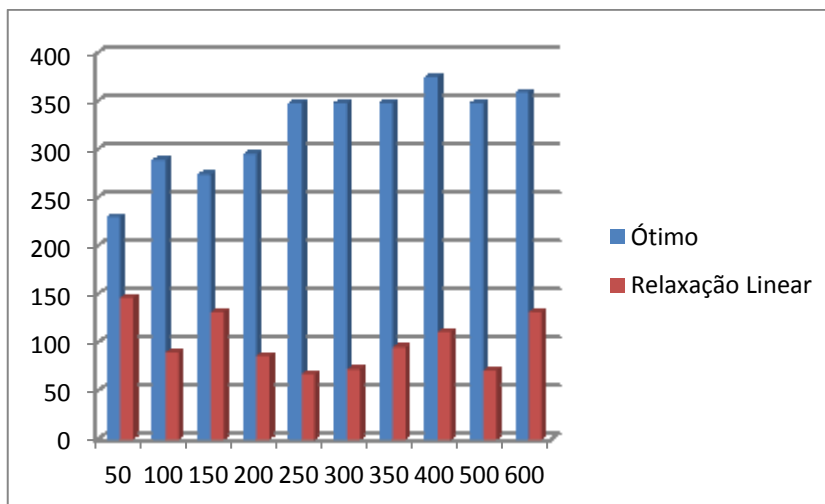


Gráfico 54 - Valores ótimos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600

Apresentamos de seguida os resultados da formulação MRT2 para o número de nós a variar entre 10 e 200, número de caminhos a variar entre 3 e 600. O custo de instalação de um monitor é fixo para todos os exemplos da tabela e o limite de caminhos que determinado monitor é capaz de monitorizar é limitado entre 1 e 2 caminhos, mas esses limites são os mesmos para todos os exemplos. Podemos ter o caso de um nó poder monitorizar um caminho ou 2 no máximo. Ou seja se o nó 1 puder monitorizar apenas 1 caminho e o nó 2 monitorizar 2 caminhos, estes limites são iguais para todos os exemplos da tabela.

Podemos ver nas tabelas que à medida que vamos aumentando o número de caminhos a monitorizar também aumenta o número de nós em que vamos instalar dispositivos de monitorização e em alguns exemplos não se consegue encontrar solução, pois a limitação m do nó irá afetar o número de nós em que podemos instalar os dispositivos. Por vezes os nós não são suficientes para monitorizar toda a rede.

Na Tabela 28, para 10 nós e 3 caminhos temos que necessitaríamos de instalar 2 dispositivos de monitorização. A partir de 10 caminhos não conseguiríamos encontrar solução pois não tínhamos nós suficientes para monitorizar mais de 10 caminhos.

Na Tabela 29, podemos verificar que para 20 nós no máximo conseguiríamos monitorizar até 30 caminhos, mas conseguimos encontrar o ótimo para a maior parte dos exemplos. Temos uma exceção para o caso de 7 caminhos em que o GAP é elevado, pois os caminhos foram gerados aleatoriamente e forma independente dos outros exemplos.

Na Tabela 32, com 60 nós só conseguiríamos monitorizar até 70 caminhos.

Na Tabela 33, também temos uma limitação, ou seja, com 70 nós só conseguiríamos monitorizar no máximo 100 caminhos.

Na Tabela 34, no máximo conseguiríamos monitorizar 150 caminhos com 100 nós.

Para 150 nós na Tabela 35, conseguiríamos monitorizar até 200 caminhos.

E na Tabela 36, para 200 nós apenas conseguiríamos monitorizar até aos 300 caminhos.

Passando agora à análise dos tempos, desde a Tabela 28 até à Tabela 36 que os tempos para obter ótimo são muito pequenos. Estes são menores que nos exemplos da formulação MRT2 com custos e m variável pois quando restringimos o número de caminhos que determinado nó poderá monitorizar, teremos de testar muito menos dados, daí os tempos serem mais baixos nesta formulação.

Relativamente aos GAP, estes são relativamente baixos com algumas exceções uma vez que ao limitarmos o número de caminhos que determinado nó poderá monitorizar para um máximo de 2 caminhos, os ótimos tornam-se mais fáceis de calcular, daí mais próximos do ótimo.

Tabela 28 - Resultados para 10 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2

10 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	705	0,015	676,5	0	2	4,04
5	723	0	723	0	3	0,00
7	1750	0,016	1750	0	4	0,00
10	3763	0,093	3763	0,015	6	0,00

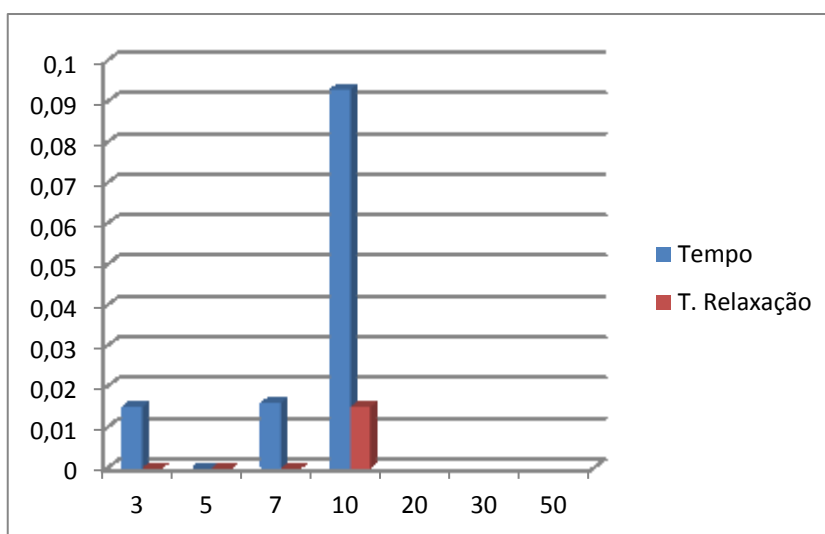


Gráfico 55- Tempos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

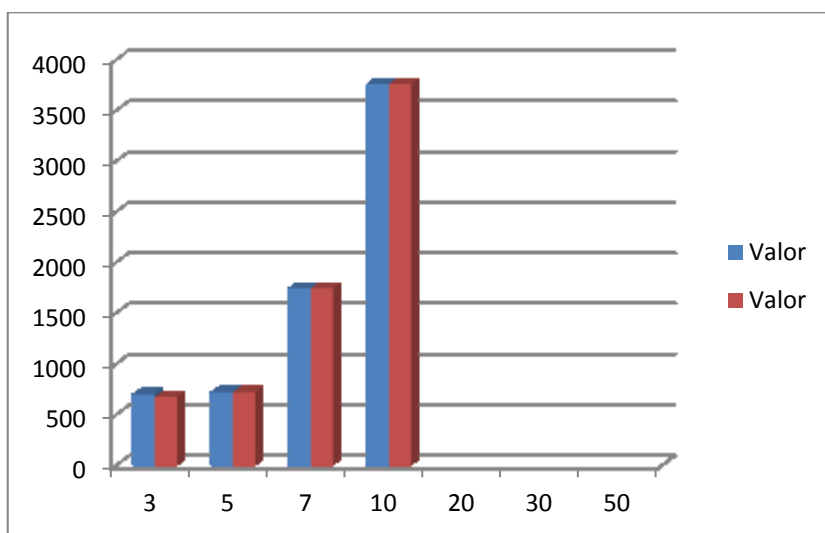


Gráfico 56- Valores ótimos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 29 - Resultados para 20 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2

20 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	190	0,01	190	0	2	0,00
5	356	0,01	356	0	3	0,00
7	810	0,02	694,5	0	4	14,26
10	1304	0,02	1304	0	6	0,00
20	5250	0,03	5250	0	12	0,00
30	12596	0,03	12596	0	19	0,00

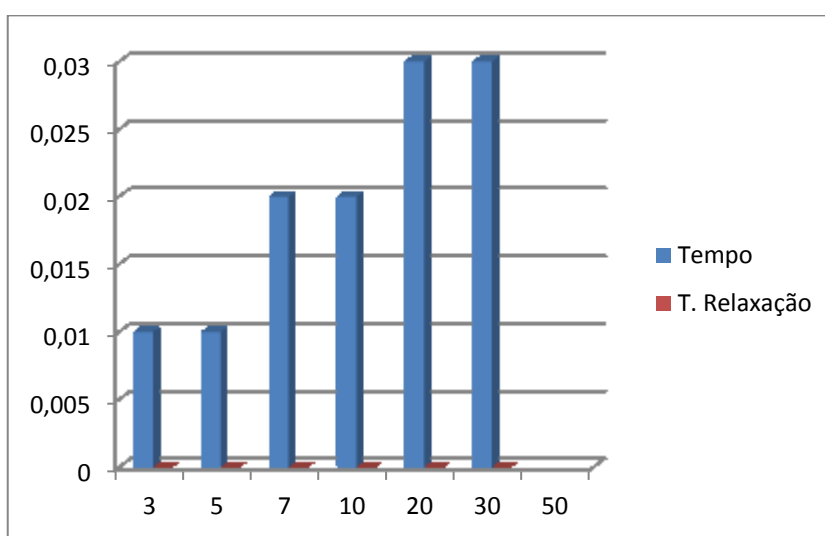


Gráfico 57- Tempos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

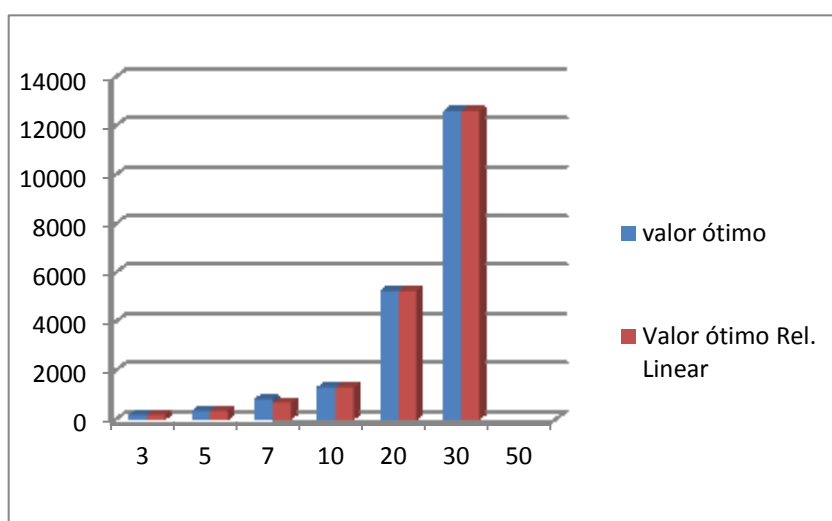


Gráfico 58- Valores ótimos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 30 - Resultados para 30 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2

30 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	380	0,03	375,5	0	2	1,18
5	587	0,02	553	0	3	5,79
7	869	0,03	864,5	0	4	0,52
10	1382	0,11	1382	0	6	0,00
20	3619	0,09	3619	0	11	0,00
30	7188	0,09	7182,5	0	17	0,08
50	18353	0,12	18353	0	27	0,00

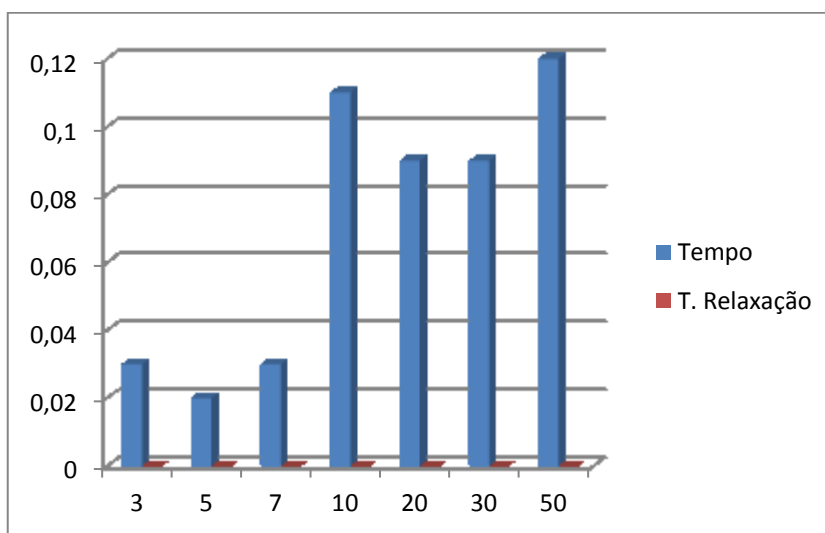


Gráfico 59- Tempos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

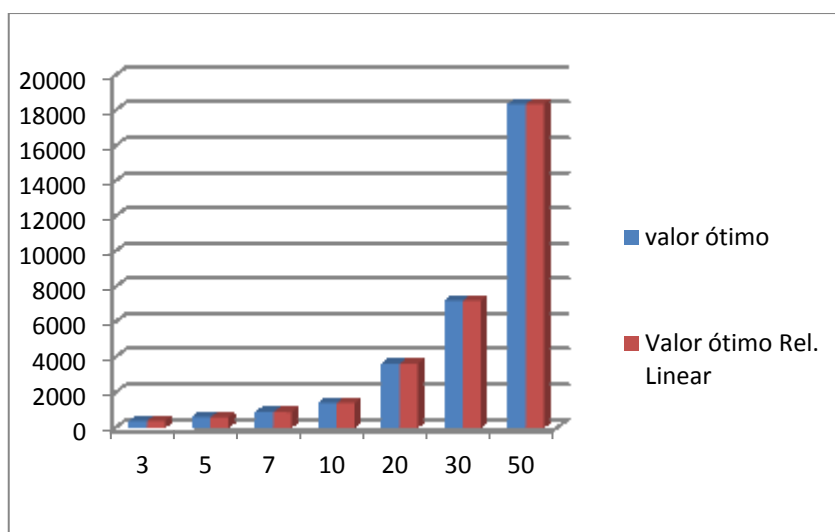


Gráfico 60- Valores ótimos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 31 - Resultados para 50 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2

50 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	248	0,02	198,5	0	2	19,96
5	391	0,03	369,5	0	3	5,50
7	590	0,12	569,5	0	4	3,47
10	940	0,14	928	0,01	6	1,28
20	2499	0,04	2499	0	12	0,00
30	4987	0,05	4987	0	17	0,00
50	13011	0,06	13011	0,01	29	0,00

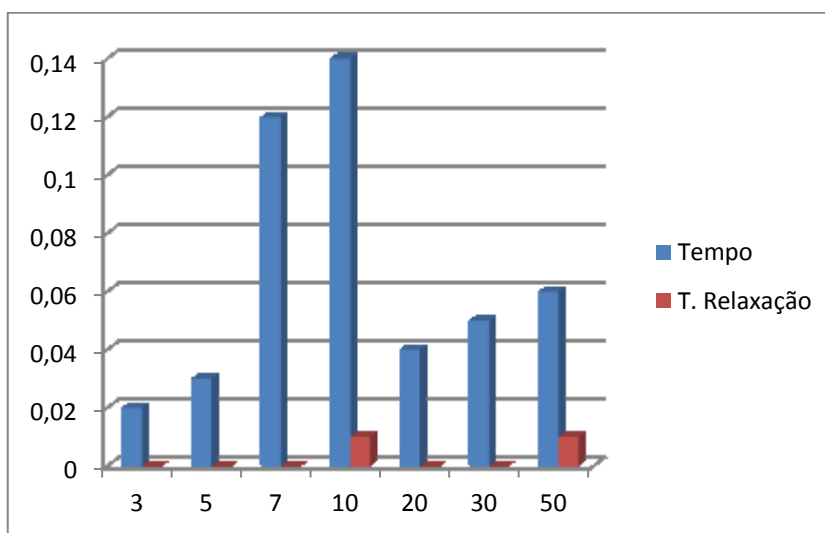


Gráfico 61 - Tempos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

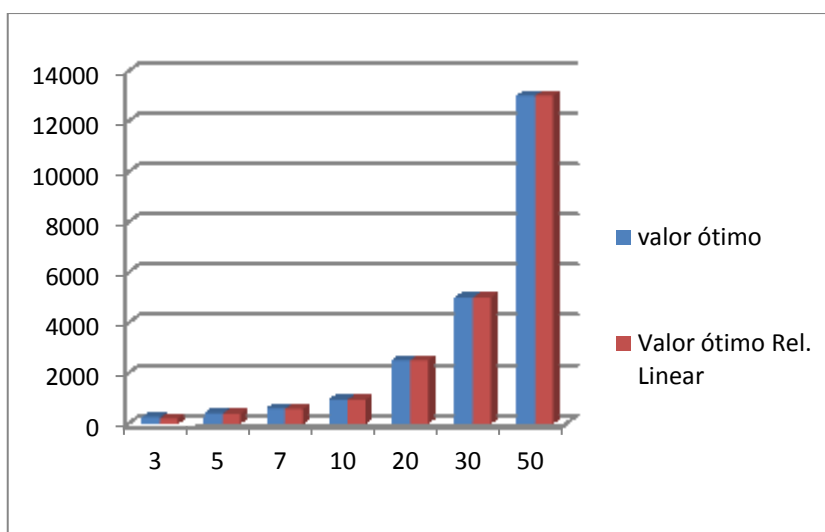


Gráfico 62 - Valores ótimos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 32 - Resultados para 60 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2

60 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	600	0,03	600	0,01	5	0,00
20	2099	0,04	2099	0	11	0,00
30	4102	0,06	4102	0,01	16	0,00
50	10568	0,16	10568	0	27	0,00
70	21571	0,51	21568	0,01	39	0,01

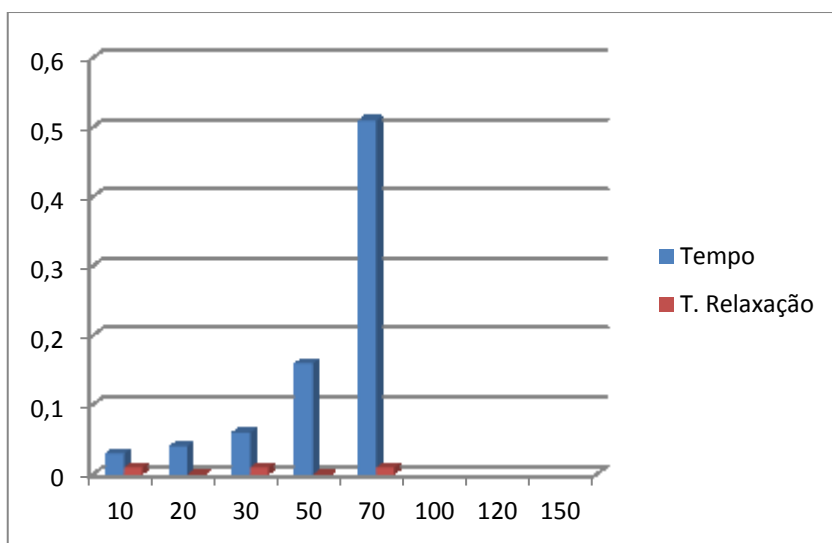


Gráfico 63- Tempos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

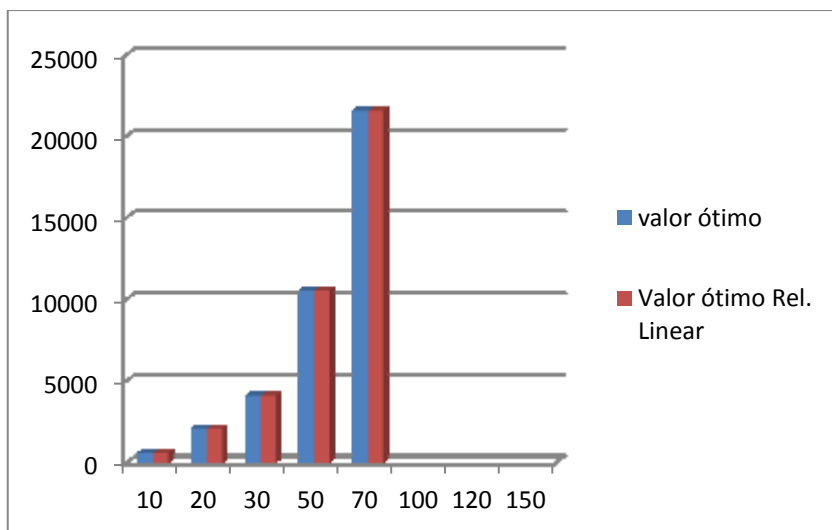


Gráfico 64- Valores ótimos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

Tabela 33 - Resultados para 70 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2

70 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	608	0,04	608	0	5	0,00
20	1784	0,05	1784	0,01	11	0,00
30	3507	0,09	3507	0	16	0,00
50	9258	0,63	9212,5	0,04	27	0,49
70	17784	0,9	17713,5	0,04	38	0,40
100	34808	0,27	34808	0,02	55	0,00

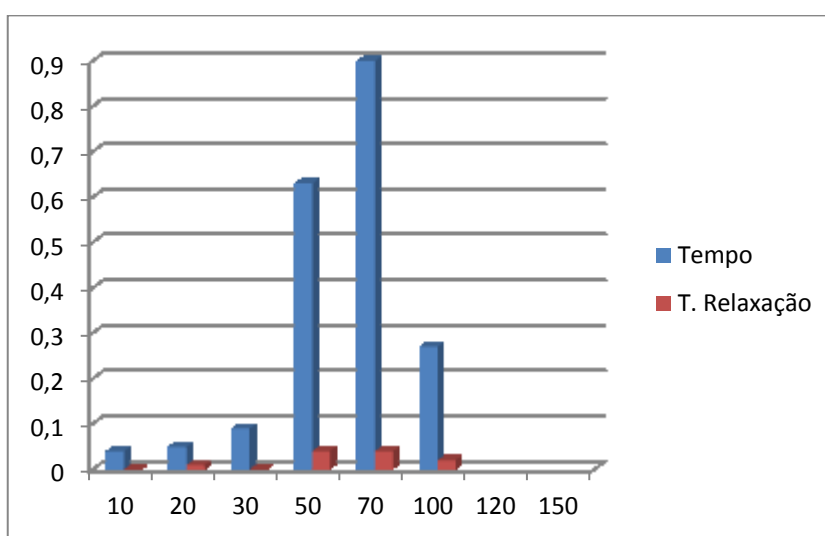


Gráfico 65 - Tempos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

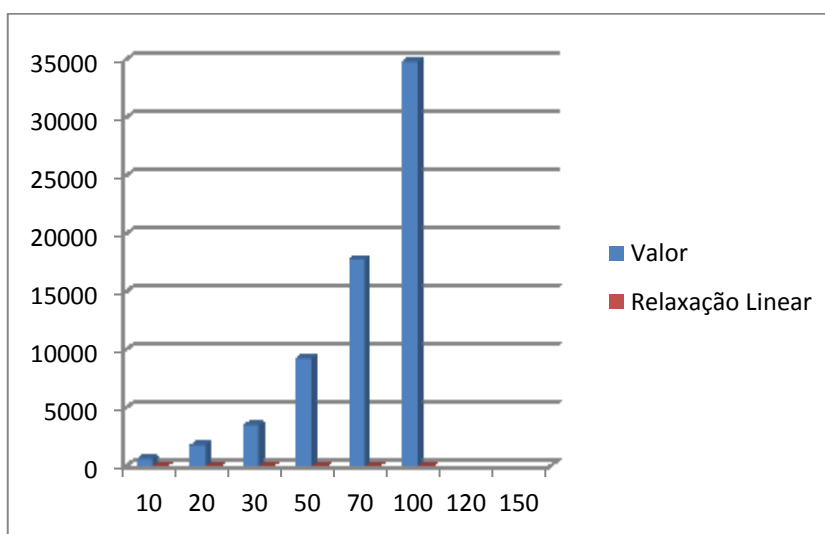


Gráfico 66 - Valores ótimos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

Tabela 34 - Resultados para 100 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2

100 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	490	0,04	490	0	5	0,00
20	1756	0,19	1735	0,01	10	1,20
30	3622	0,7	3615,5	0,02	16	0,18
50	9203	0,15	9203	0,01	26	0,00
70	16192	0,69	16185	0,01	37	0,05
100	30660	0,4	30660	0,02	54	0,00
120	42266	0,47	42266	0,03	66	0,00
150	68718	0,59	68718	0,03	91	0,00

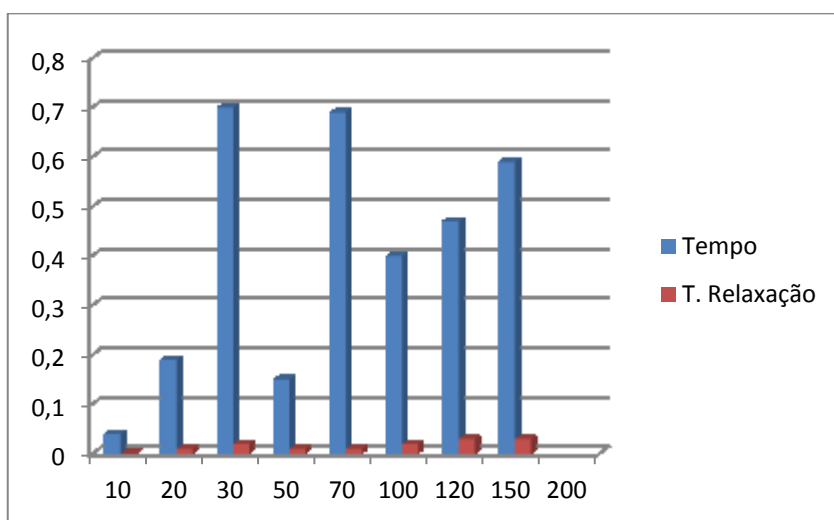


Gráfico 67- Tempos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200

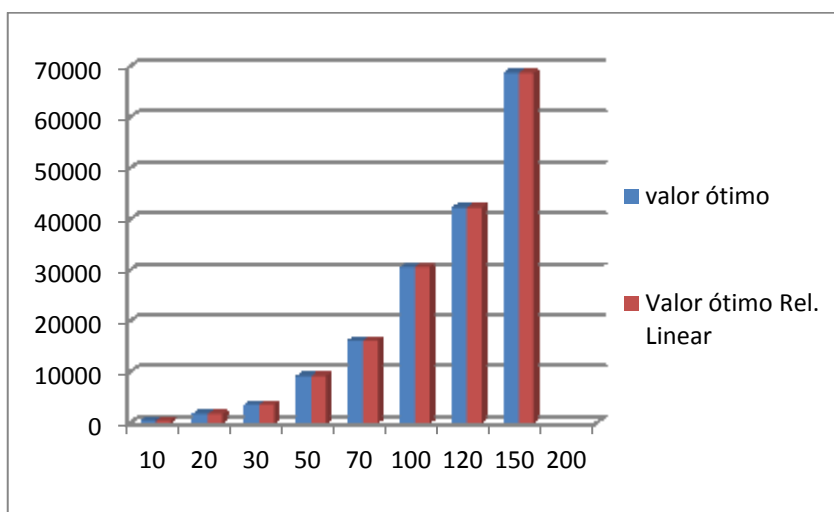


Gráfico 68- Valores ótimos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200

Tabela 35 - Resultados para 150 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2

150 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
50	6737	0,24	6737	0,01	29	0,00
100	22370	0,46	22370	0,03	55	0,00
150	46541	1,06	46541	0,05	85	0,00
200	81839	1,55	81839	0,05	119	0,00

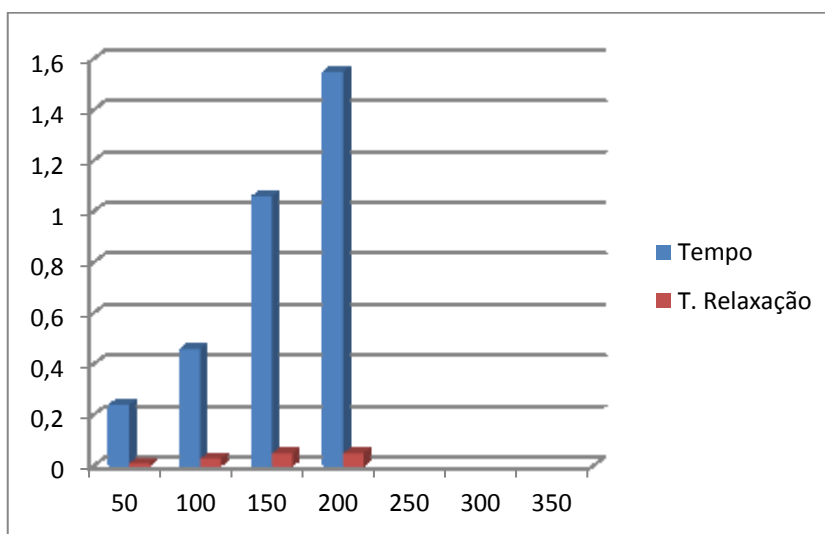


Gráfico 69 - Tempos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

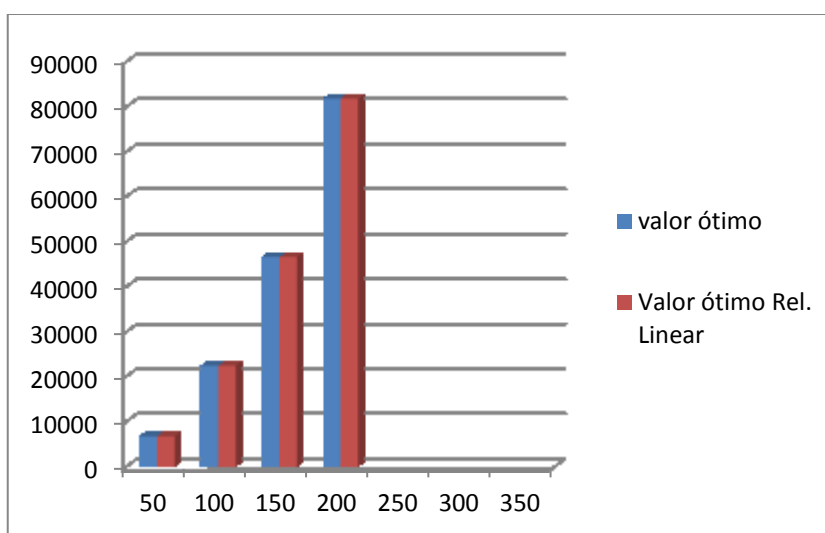


Gráfico 70 - Valores ótimos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

Tabela 36 - Resultados para 200 nós com custos fixos e m limitado usando o MRT2

200 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
50	4267	0,29	4267	0,02	27	0,00
100	14487	2,31	14474	0,13	55	0,09
150	31275	2,56	31263,5	0,06	83	0,04
200	54031	1,84	54031	0,07	112	0,00
250	83334	2,27	83334	0,1	142	0,00
300	120363	2,56	120363	0,12	176	0,00

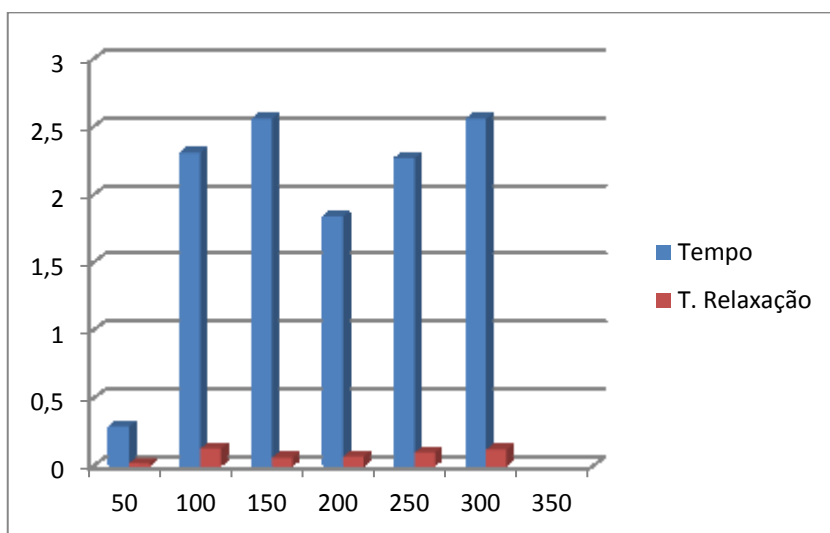


Gráfico 71 - Tempos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

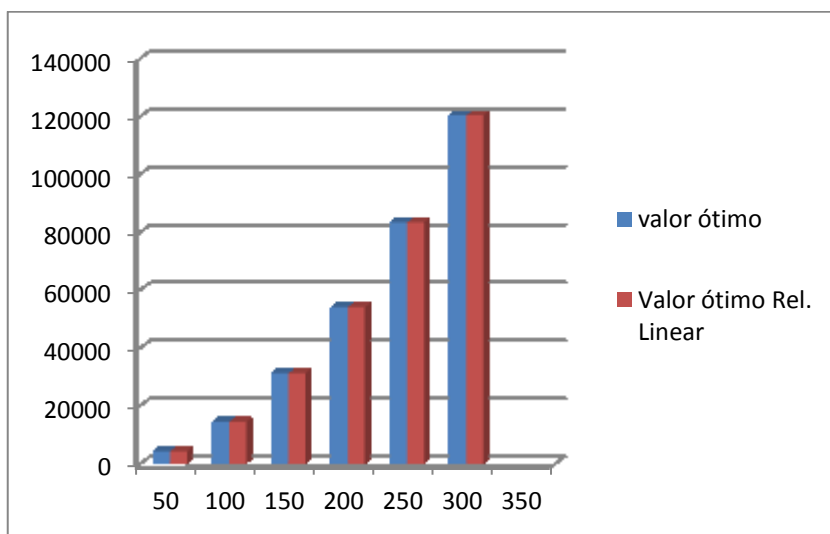


Gráfico 72 - Valores ótimos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

Depois de testado para valores limitados do m em que para cada caminho, cada nó só poderia monitorizar até um máximo 2 caminhos, fizemos um teste para que todos os nós pudessem monitorizar 3 caminhos. A conclusão a que cheguei foi de que consegue-se encontrar mais soluções ótimas do que no caso anterior mas o tempo de resolução é muito mais elevado. Esses dados apenas foram calculados para comparação.

Vamos agora apresentar os resultados da formulação MRT2 para o número de nós a variar entre 10 e 200, número de caminhos a variar entre 3 e 600. O custo de instalação de um monitor deixa de ser fixo e passa a ser variável para todos os exemplos da tabela e o limite de caminhos que determinado monitor é capaz de monitorizar é variável entre 1 e o número de caminhos em questão.

Por exemplo, para 10 nós e 3 caminhos, cada nó poderá monitorizar entre 1 e 3 caminhos enquanto que para 5 caminhos, cada nó poderá monitorizar até um máximo de 5 caminhos e assim sucessivamente ao longo dos exemplos da tabela.

Uma vez que os custos foram gerados aleatoriamente e independentemente dos exemplos não podemos fazer comparações em termos de valor ótimo e número de monitores a serem instalados. Pois existem situações em que valor ótimo é mais baixo numas situações do que noutras e que são instalados o mesmo número de dispositivos de monitorização. Apenas podemos dizer que à medida que vai aumentando o número de caminhos o número de dispositivos de monitorização também aumenta.

Na Tabela 41 temos uma grande variedade de situações porque sendo os custos gerados aleatoriamente com intervalos muito díspares é muito natural que os resultados sejam também muito diferentes.

Tabela 37 - Resultados para 10 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2

10 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	705	0,1	451	0,01	2	36,03
5	262	0,06	163	0	2	37,79
7	401	0,05	345,667	0	2	13,80
10	333	0,06	190,905	0	2	42,67
20	876	0,69	329,397	0	3	62,40
30	525	0,26	265,487	0	3	49,43
50	1092	0,19	520,777	0,01	3	52,31

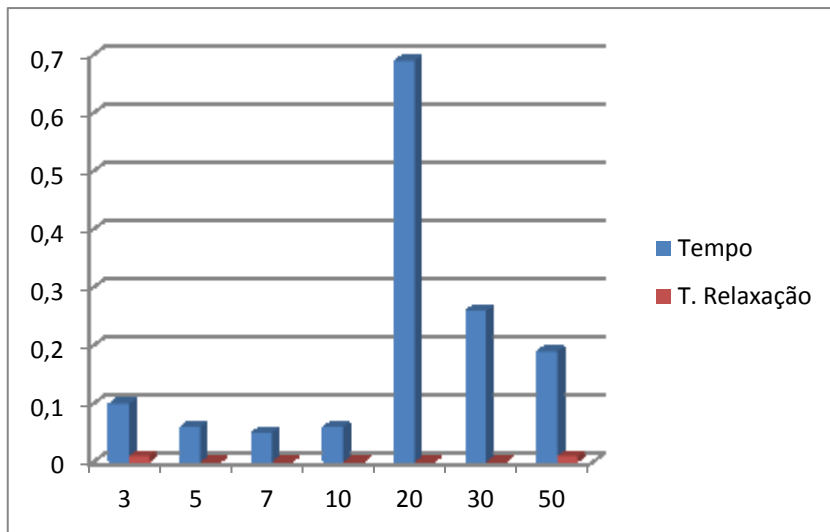


Gráfico 73- Tempos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

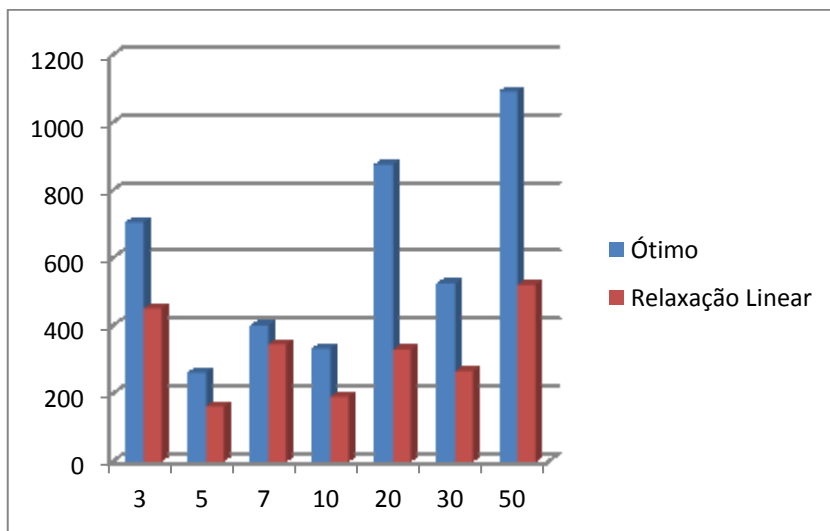


Gráfico 74 - Valores ótimos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 38 - Resultados para 20 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2

20 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	190	0,07	190	0,01	2	0
5	387	0,05	223,667	0,01	2	42,20
7	485	0,14	284	0	2	41,44
10	623	0,34	371,33	0	2	40,40
20	511	0,7	195,526	0,01	3	61,74
30	704	0,82	241,739	0,01	3	65,66
50	486	0,48	126,504	0	3	73,97

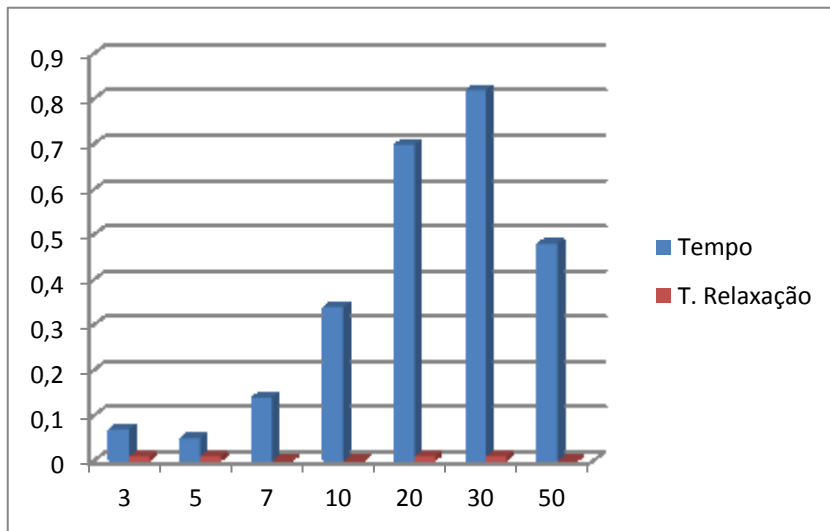


Gráfico 75 - Tempos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

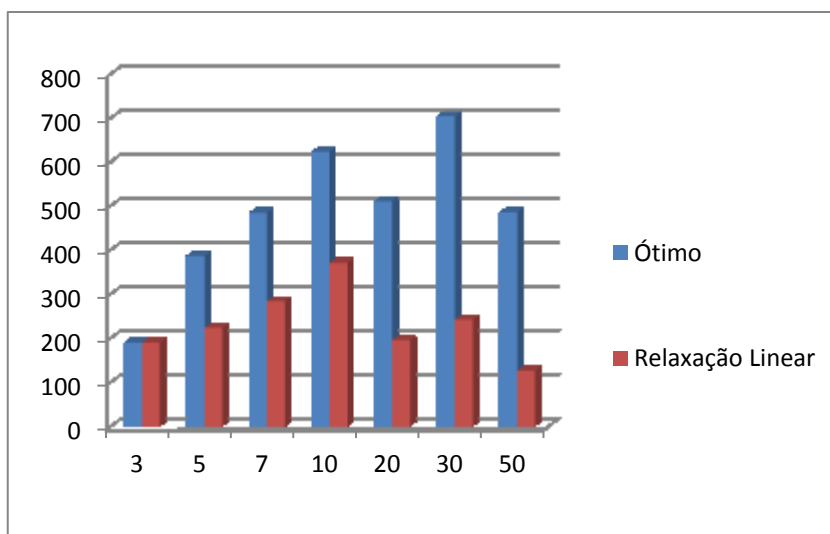


Gráfico 76- Valores ótimos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 39 - Resultados para 30 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2

30 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	350	0,08	214,667	0	2	38,67
5	327	0,06	304,75	0	2	6,80
7	513	0,2	340	0	2	33,72
10	395	0,26	160,222	0	2	59,44
20	337	0,2	175,976	0	3	47,78
30	381	0,75	180,228	0,01	3	52,70
50	701	2,092	317,792	0,01	3	54,67

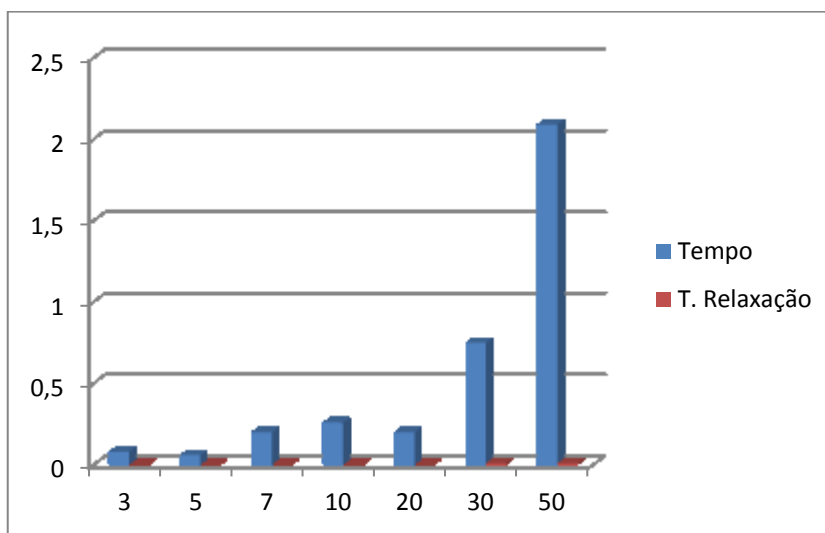


Gráfico 77- Tempos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

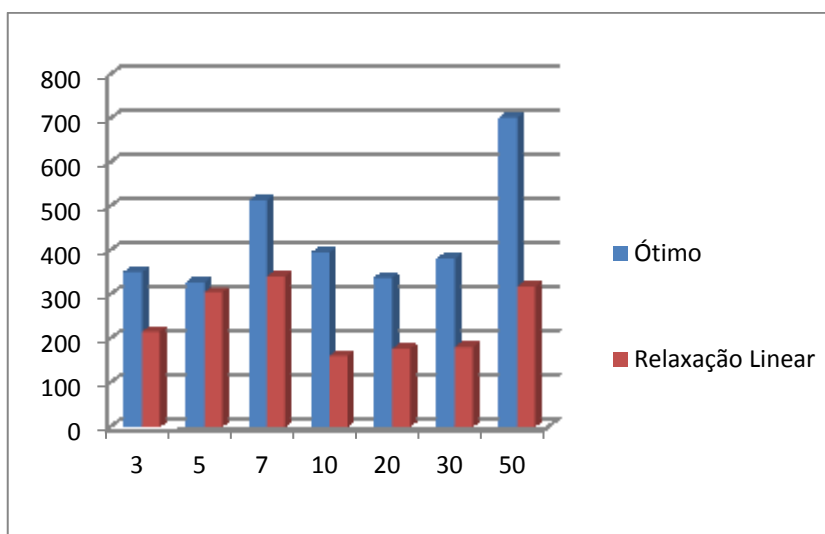


Gráfico 78- Valores ótimos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 40 - Resultados para 50 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2

50 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
3	248	0,06	198,5	0	2	19,96
5	226	0,07	154	0	2	31,86
7	128	0,08	99,5	0,01	2	22,27
10	242	0,11	117,833	0	2	51,31
20	416	0,19	310,359	0	3	25,39
30	437	1,5	226,253	0,01	3	48,23
50	286	1,27	104,816	0,03	3	63,35

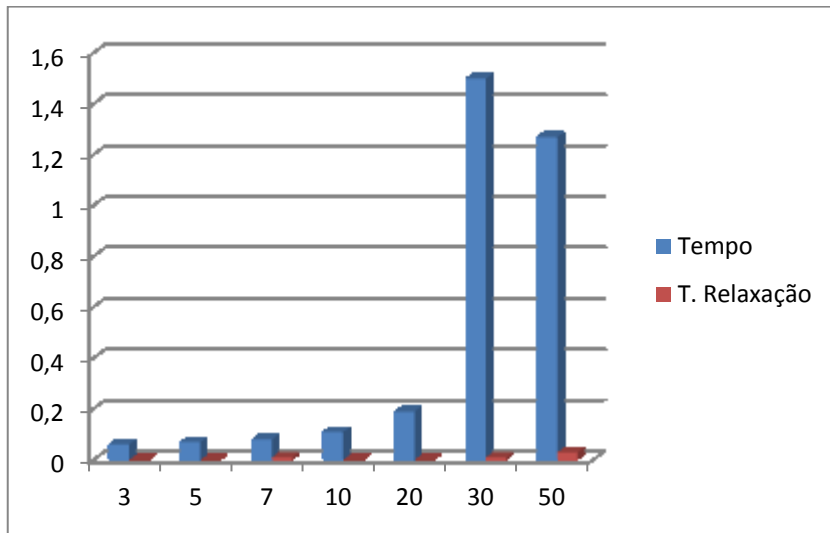


Gráfico 79- Tempos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

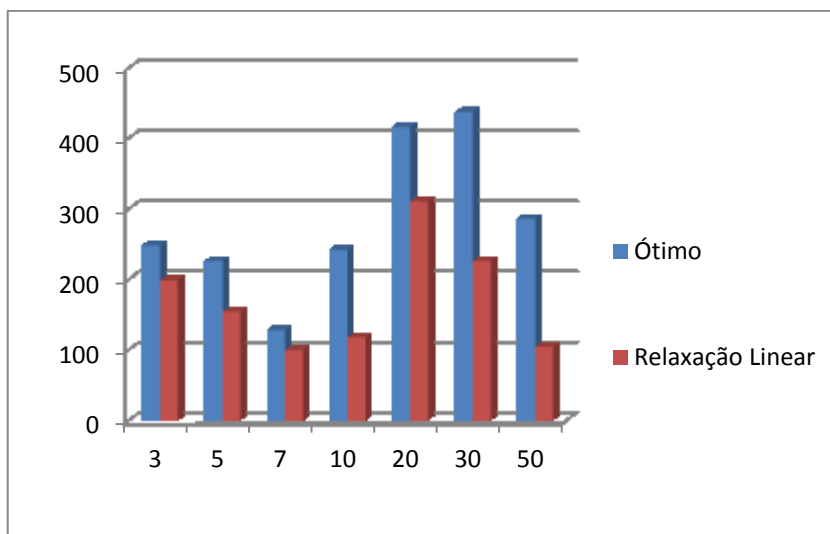


Gráfico 80- Valores ótimos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 41 - Resultados para 60 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2

60 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	237	0,16	151,635	0	2	36,02
20	242	1,05	161,588	0,01	2	33,23
30	221	0,14	163,275	0	3	26,12
50	326	2,56	113,424	0,02	4	65,21
70	402	2,28	171,455	0,03	3	57,35
100	505	4,532	268,447	0,04	4	46,84
120	863	5,2	280,636	0,02	5	67,48
150	427	4,691	165,649	0,08	4	61,21

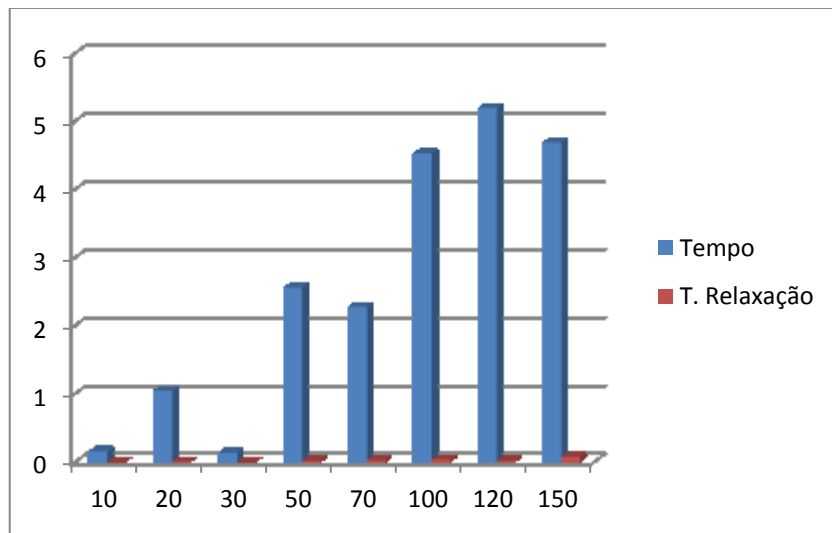


Gráfico 81 - Tempos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

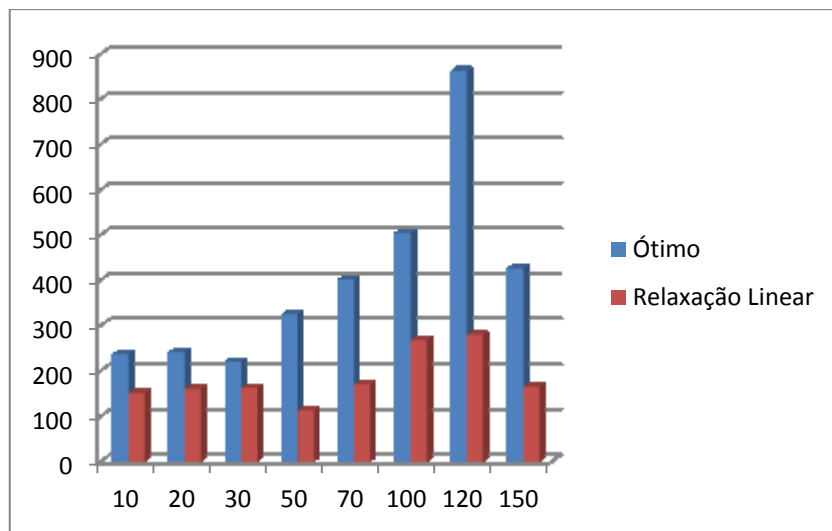


Gráfico 82- Valores ótimos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

Tabela 42 - Resultados para 70 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2

70 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	147	0,1	90,2222	0	2	3,86
20	329	0,541	108,25	0,02	3	6,71
30	669	1,71	440,728	0,02	3	3,41
50	358	3,371	174,876	0,03	3	5,12
70	459	1,94	152,942	0,04	3	6,67
100	368	4,321	176,024	0,06	4	5,22
120	529	4,962	257,608	0,09	4	5,13
150	512	14,572	124,834	0,1	4	7,56

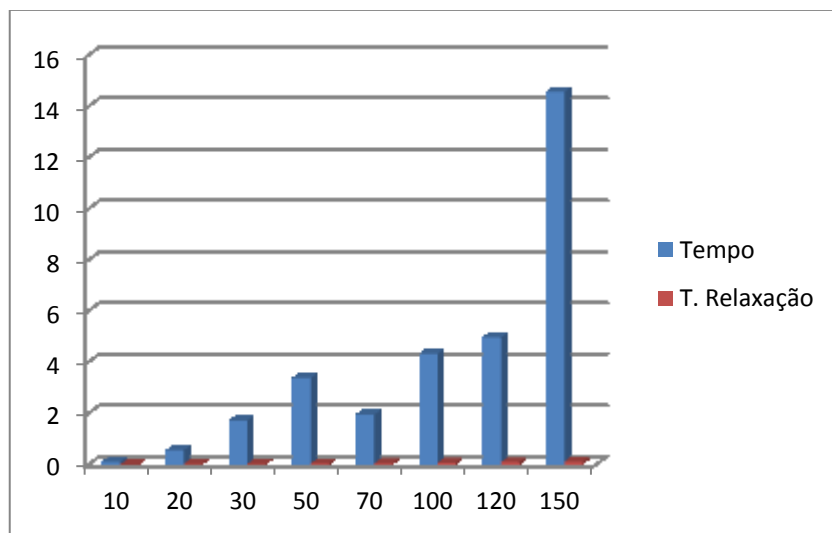


Gráfico 83- Tempos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

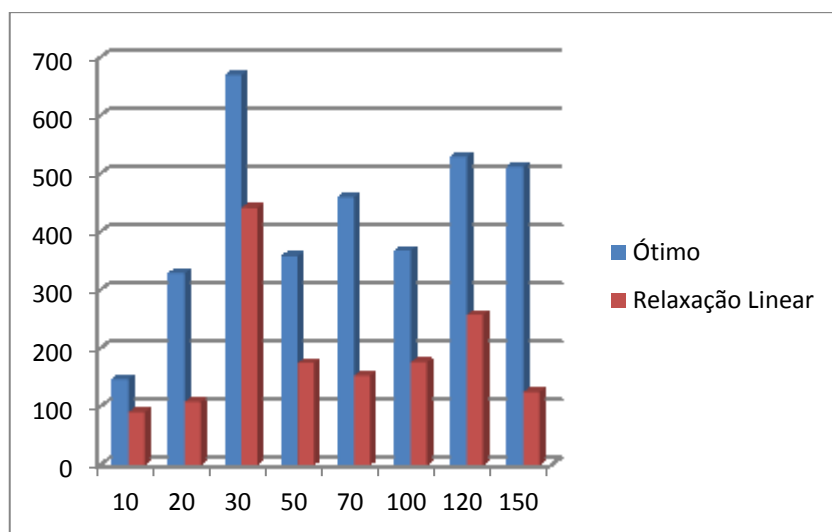


Gráfico 84- Valores ótimos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

Tabela 43 - Resultados para 100 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2

100 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
10	159	0,14	72,508	0	2	54,40
20	265	1,04	109,99	0,02	3	58,50
30	217	1,44	121,81	0,02	3	43,86
50	312	2,301	103,57	0,04	3	66,80
70	328	2,981	103,02	0,07	3	68,59
100	418	5,378	159,82	0,11	4	61,77
120	385	4,501	97,9	0,11	4	74,57
150	380	8,636	87,191	0,12	5	77,06
200	440	11,053	111,09	0,226	4	74,75

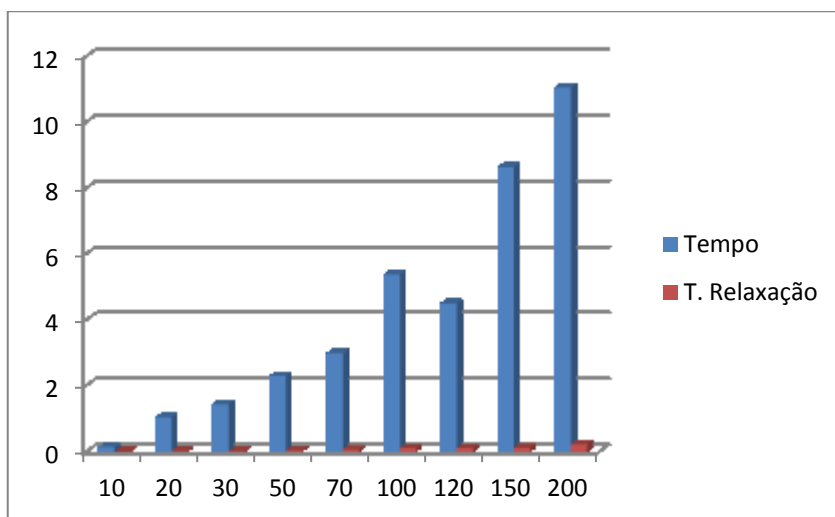


Gráfico 85 - Tempos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200

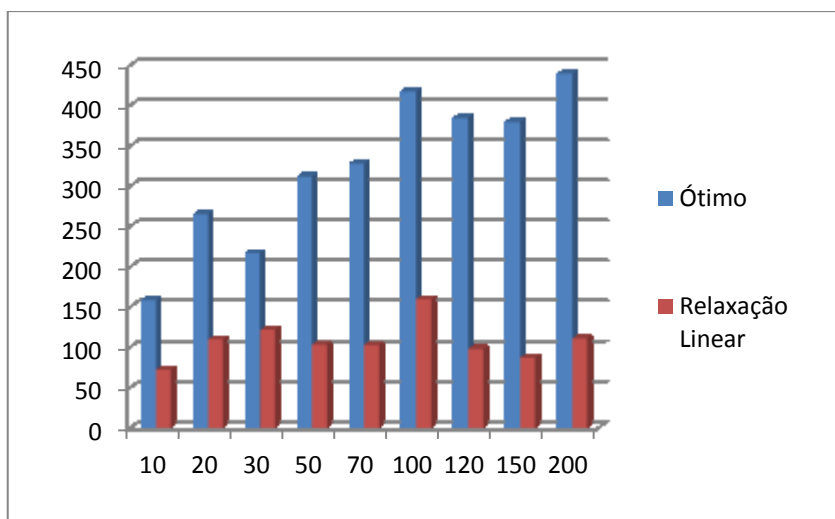


Gráfico 86 - Valores ótimos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200

Tabela 44 - Resultados para 150 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2

150 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
50	265	1,94	127,124	0,09	3	52,03
100	369	8,062	122,602	0,13	4	66,77
150	325	18,83	118,319	0,33	4	63,59
200	391	22,904	96,3534	0,34	5	75,36
250	291	10,643	103,441	0,43	4	64,45
300	405	29,813	91,2621	0,62	4	77,47
350	431	34,47	83,411	0,611	5	80,65

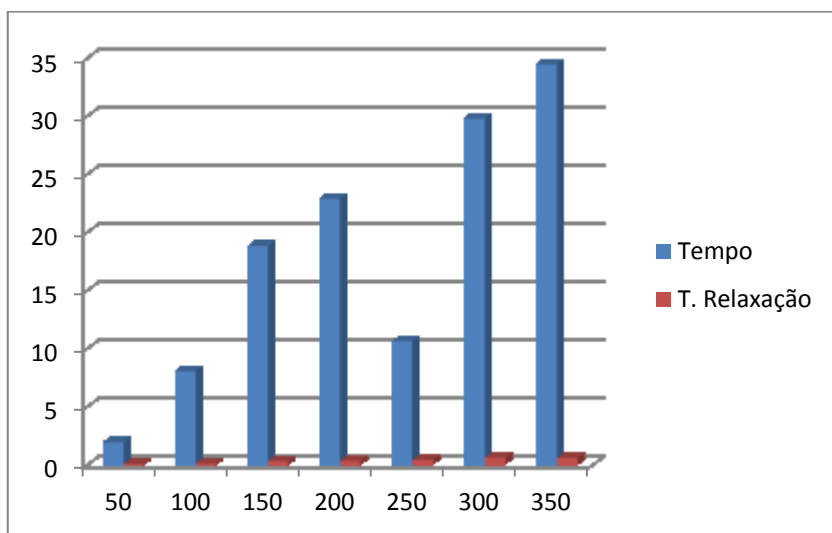


Gráfico 87 - Tempos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

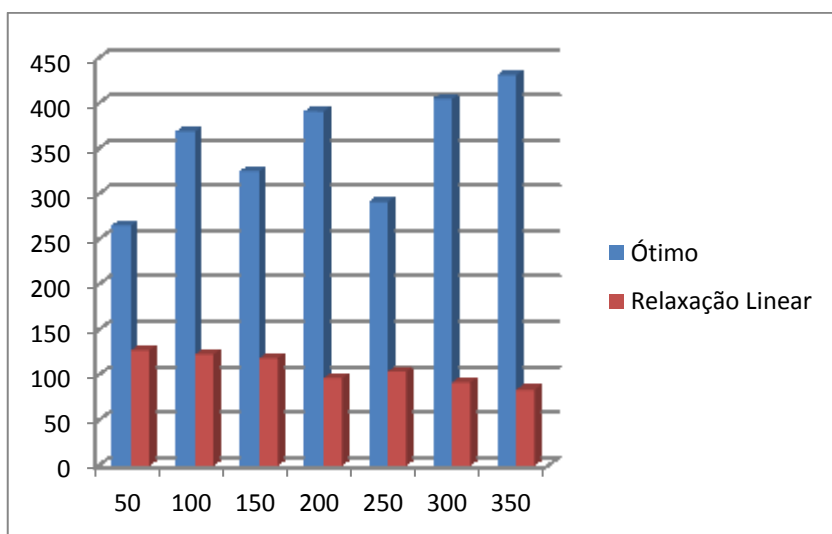


Gráfico 88 - Valores ótimos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

Tabela 45 - Resultados para 200 nós com custos variáveis e m variável usando o MRT2

200 nós						
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		Nº Monitores	GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo		
50	230	4,85	146,72	0,08	3	36,21
100	314	9,082	116,11	0,25	4	63,02
150	322	13,96	100,172	0,35	4	68,89
200	322	27,218	91,7655	0,58	4	71,50
250	440	16,525	95,9061	0,691	4	78,20
300	363	42,845	87,7219	0,96	4	75,83
350	345	52,018	76,5813	1,021	5	77,80
400	337	57,85	79,4085	1,19	4	76,44
500	358	94,218	96,8732	1,411	5	72,94
600	406	263,968	99,1788	2,187	5	75,57

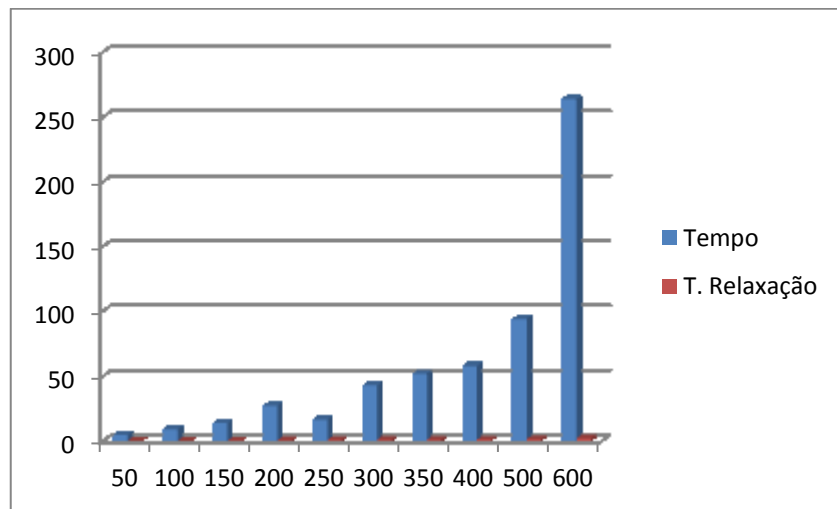


Gráfico 89- Tempos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600

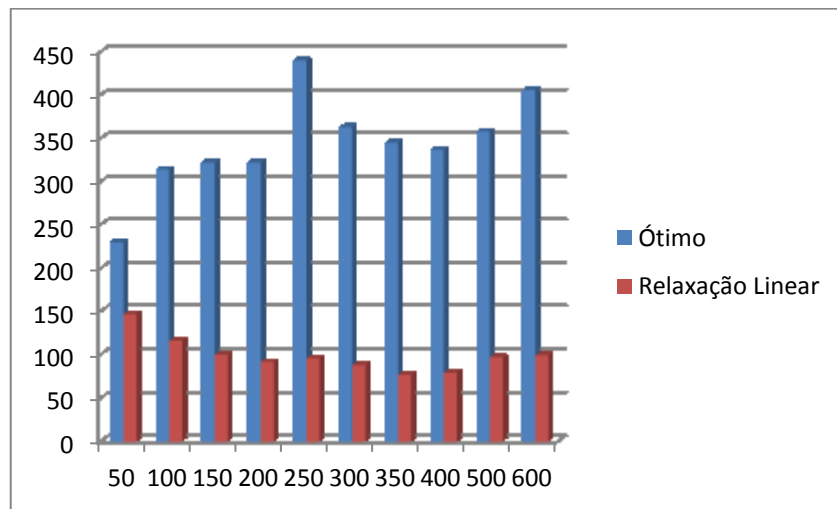


Gráfico 90 - Valores ótimos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600

Apresentamos agora os resultados para o problema MRT3 para o número de nós a variar entre 10 e 200, número de caminhos a variar entre 3 e 600.

Este problema é fácil de resolver como se pode verificar nas várias tabelas pois encontra-se o ótimo para todos os exemplos, talvez por se tratar de um problema cuja matriz das restrições, suspeitamos, seja totalmente unimodular.

Nestes resultados podemos ver que o tempo de execução é maior na relaxação linear do que para obter o valor ótimo. Esta particularidade deve-se ao fato do programa Xpress usar diferentes procedimentos para a resolução do problema num e noutro caso.

Relativamente aos valores ótimos podemos dizer que à medida que o número e caminhos aumenta o valor ótimo também aumenta.

Não apresentamos resultados para m fixos e d fixos pois os valores encontrados foram iguais uma vez que o modelo não depende do m ou do d .

Tabela 46 - Resultados para 10 nós usando o MRT3

10 nós					
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo	
3	11	0,016	11	0,087	0
5	14	0,01	14	0,087	0
7	27	0,014	27	0,134	0
10	50	0,014	50	0,076	0
20	207	0,039	207	0,105	0
30	425	0,017	425	0,022	0
50	695	0,055	695	0,068	0

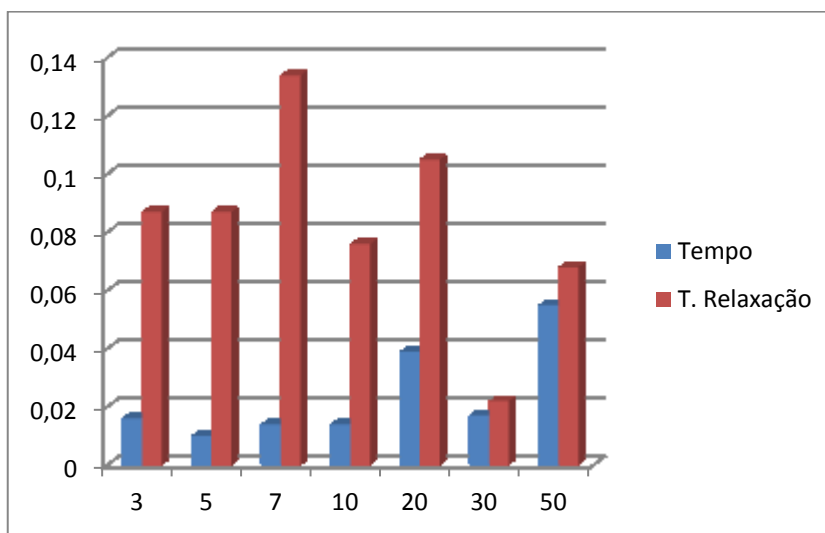


Gráfico 91 - Tempos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

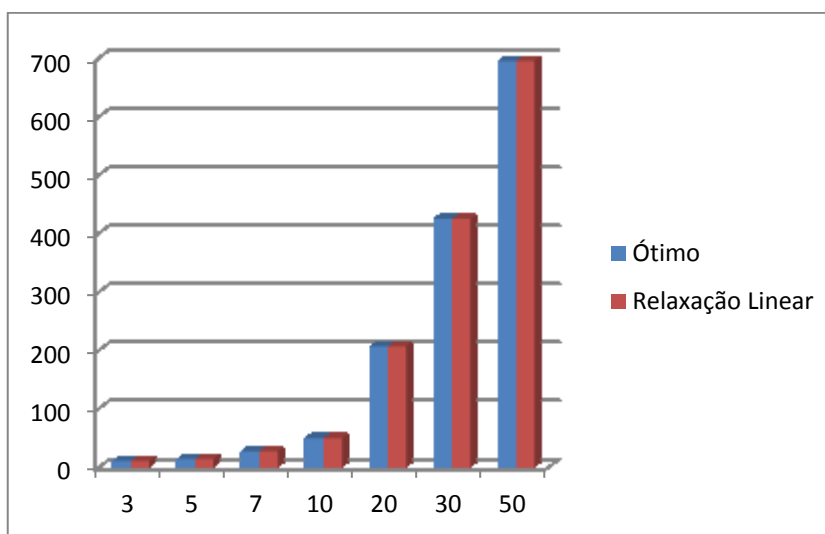


Gráfico 92- Valores ótimos para 10 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 47 - Resultados para 20 nós usando o MRT3

20 nós					
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo	
3	7	0,008	7	0,102	0
5	20	0,008	20	0,094	0
7	32	0,041	32	0,086	0
10	62	0,014	62	0,073	0
20	214	0,019	214	0,029	0
30	454	0,148	454	0,176	0
50	1203	0,028	1203	0,044	0

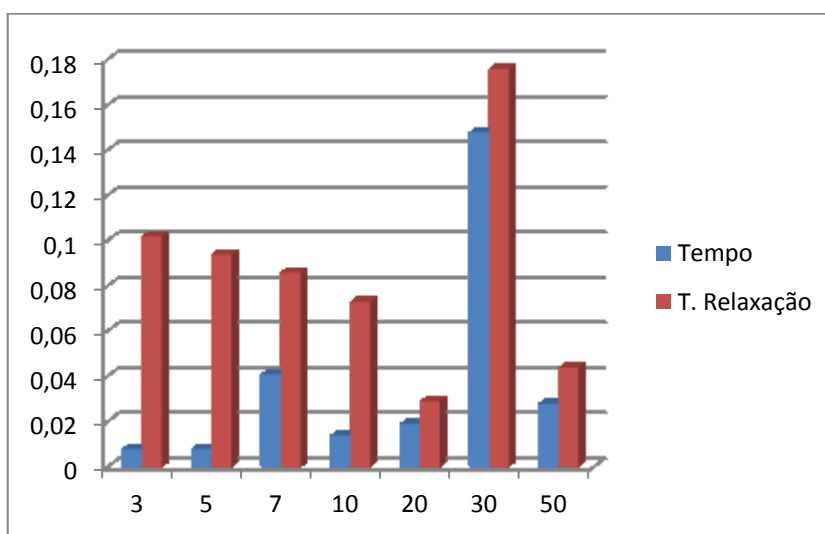


Gráfico 93 - Tempos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

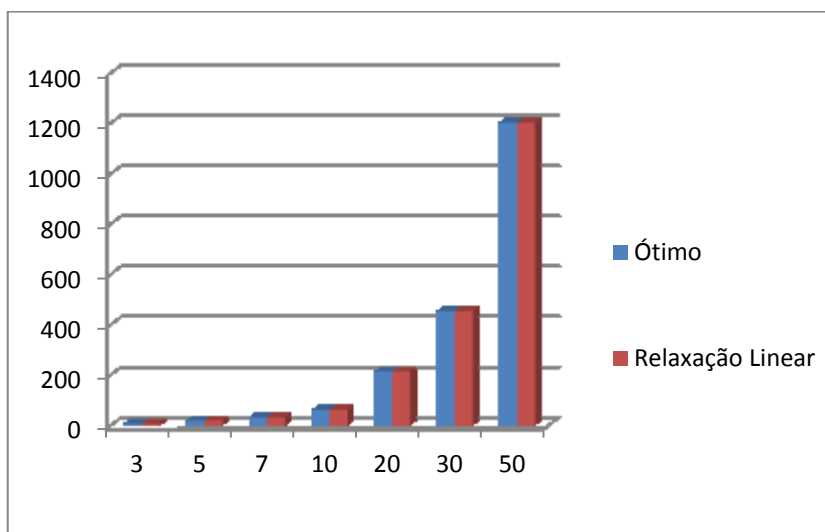


Gráfico 94 - Valores ótimos para 20 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 48 - Resultados para 30 nós usando o MRT3

30 nós					
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo	
3	6	0,008	6	0,015	0
5	14	0,071	14	0,078	0
7	27	0,06	27	0,068	0
10	69	0,014	69	0,022	0
20	219	0,018	219	0,038	0
30	405	0,025	405	0,039	0
50	1074	0,074	1074	0,093	0

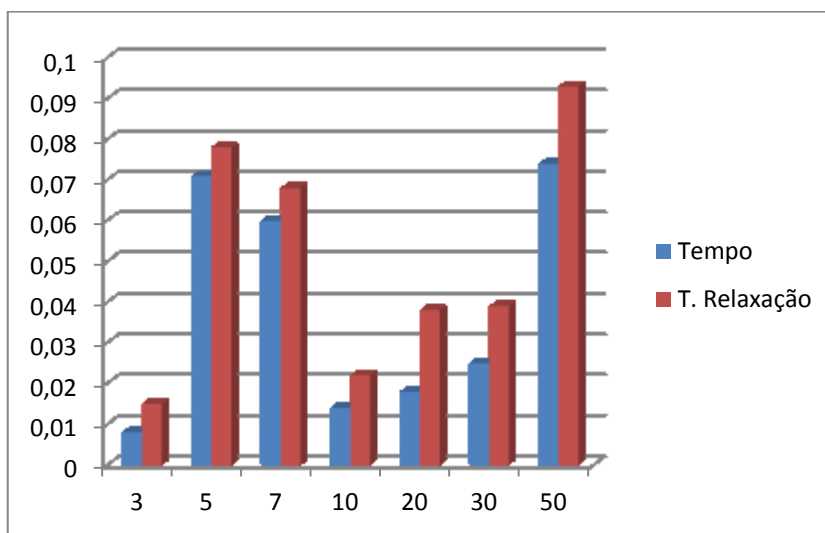


Gráfico 95 - Tempos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

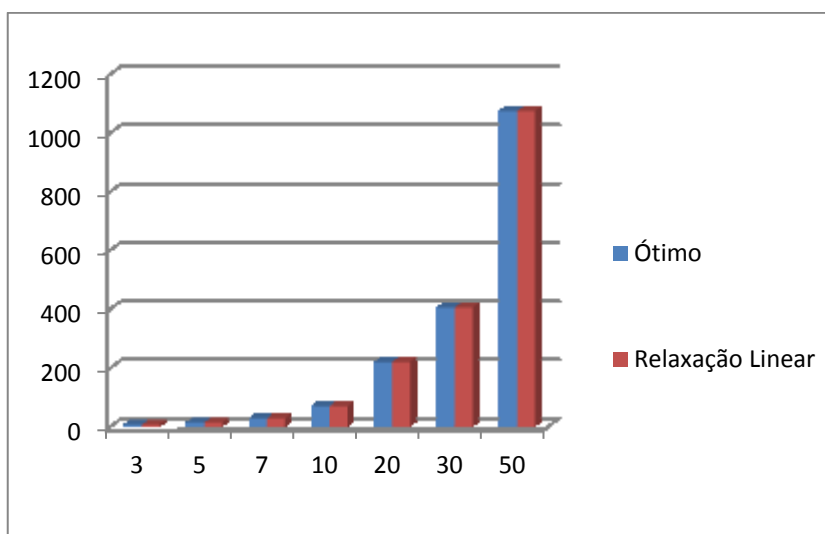


Gráfico 96- Valores ótimos para 30 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 49 - Resultados para 50 nós usando o MRT3

50 nós					
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo	
3	7	0,12	7	0,07	0
5	16	0,01	16	0,017	0
7	29	0,018	29	0,027	0
10	52	0,017	52	0,028	0
20	216	0,025	216	0,042	0
30	553	0,031	553	0,054	0
50	1487	0,047	1487	0,077	0

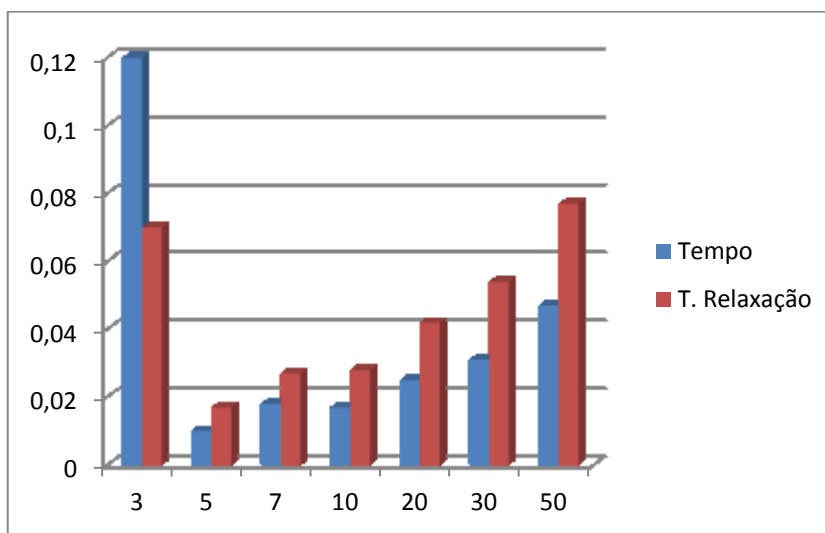


Gráfico 97- Tempos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

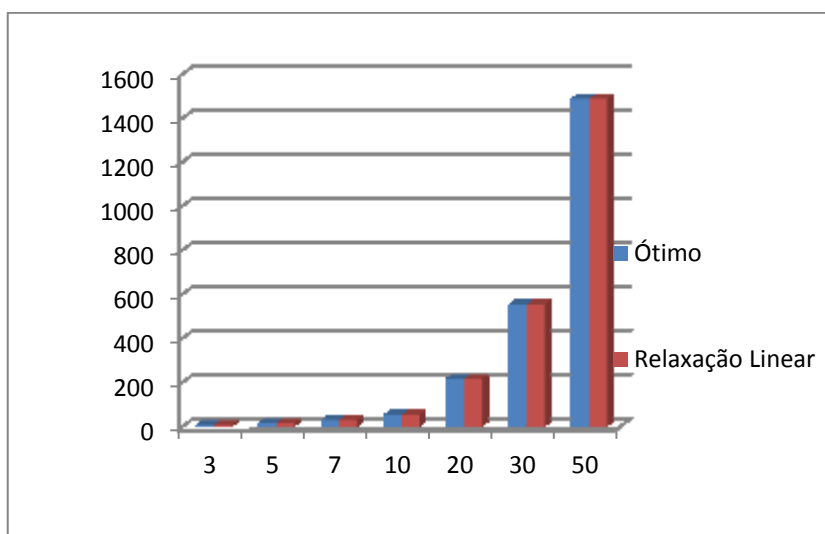


Gráfico 98- Valores ótimos para 50 nós com caminhos a variar entre 3 e 50

Tabela 50 - Resultados para 60 nós usando o MRT3

60 nós					
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo	
10	45	0,051	45	0,097	0
20	199	0,028	199	0,046	0
30	526	0,034	526	0,062	0
50	1455	0,049	1455	0,087	0
70	2645	0,089	2645	0,133	0
100	5343	0,131	5343	0,192	0
120	7436	0,153	7436	0,227	0
150	11880	0,228	11880	0,319	0

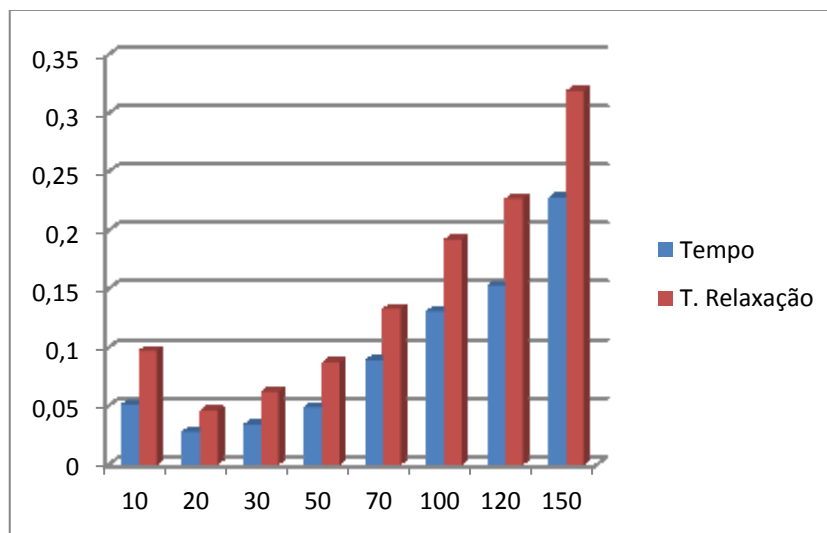


Gráfico 99- Tempos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

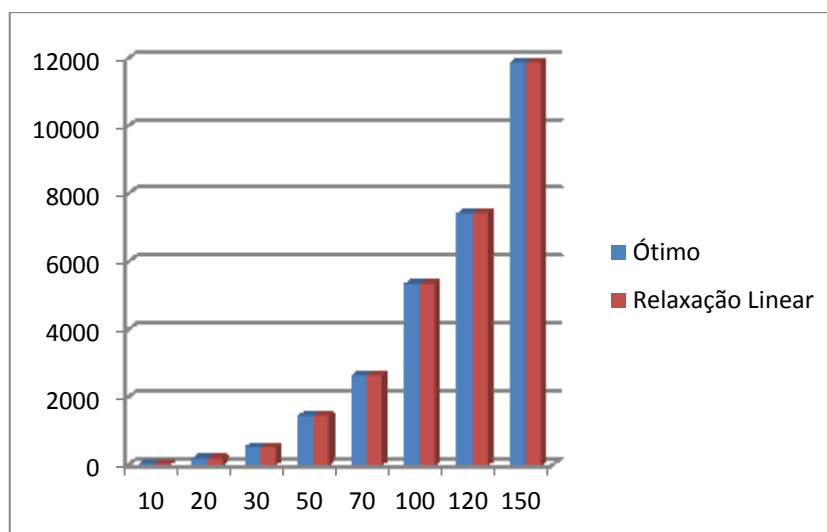


Gráfico 100 - Valores ótimos para 60 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

Tabela 51 - Resultados para 70 nós usando o MRT3

70 nós					
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo	
10	45	0,032	45	0,047	0
20	215	0,04	215	0,063	0
30	400	0,039	400	0,069	0
50	1243	0,055	1243	0,104	0
70	2423	0,114	2423	0,168	0
100	4874	0,171	4874	0,243	0
120	6880	0,247	6880	0,367	0
150	10824	0,305	10824	0,405	0

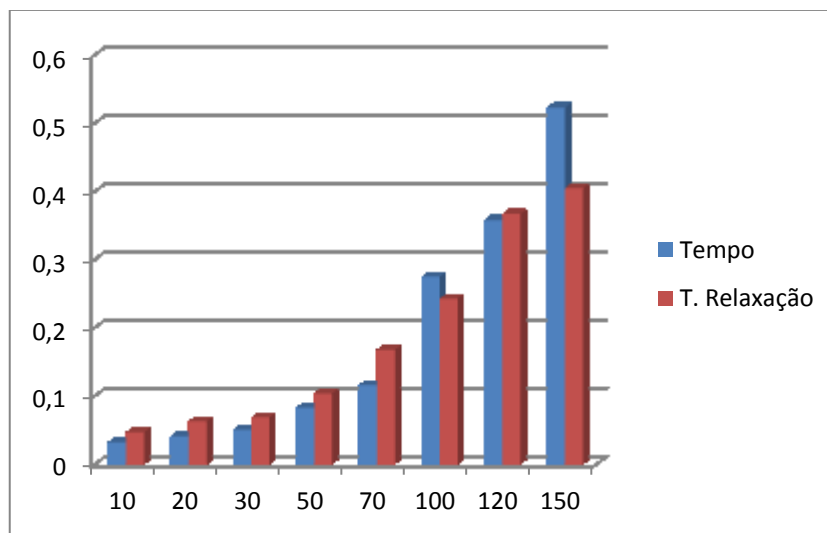


Gráfico 101 - Tempos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

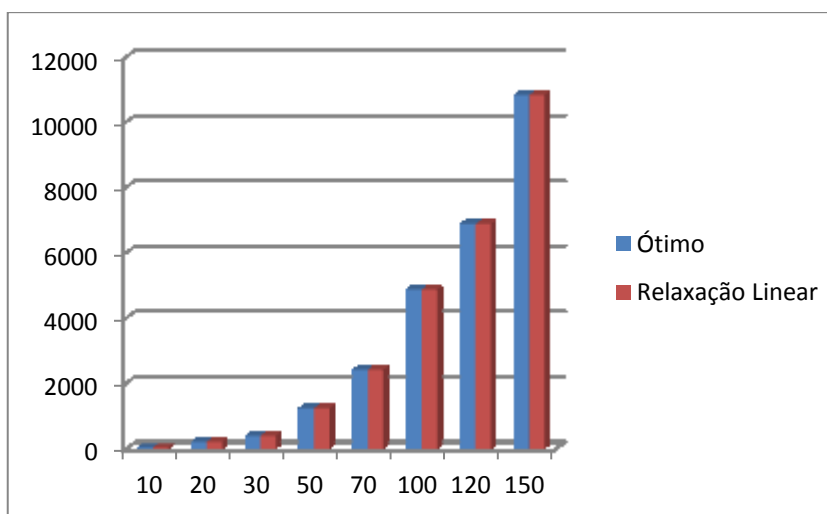


Gráfico 102- Valores ótimos para 70 nós com caminhos a variar entre 10 e 150

Tabela 52 - Resultados para 100 nós usando o MRT3

100 nós					
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo	
10	57	0,032	57	0,05	0
20	188	0,041	188	0,071	0
30	453	0,051	453	0,096	0
50	1239	0,083	1239	0,156	0
70	2468	0,116	2468	0,219	0
100	4951	0,275	4951	0,376	0
120	7520	0,358	7520	0,48	0
150	11335	0,523	11335	0,68	0
200	20145	0,781	20145	0,987	0

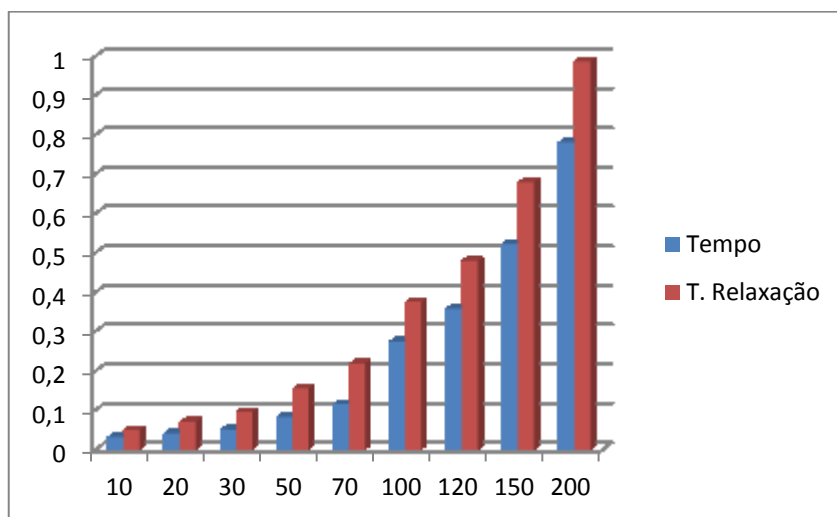


Gráfico 103- Tempos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200

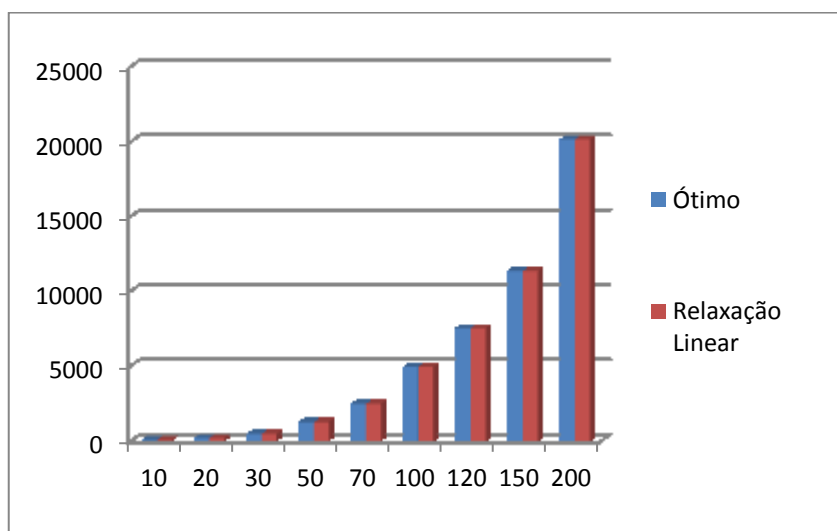


Gráfico 104 - Valores ótimos para 100 nós com caminhos a variar entre 10 e 200

Tabela 53 - Resultados para 150 nós usando o MRT3

150 nós					
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo	
50	1311	0,128	1311	0,231	0
100	5006	0,314	5006	0,546	0
150	11044	0,997	11044	1,278	0
200	19989	1,528	19989	1,981	0
250	30381	2,127	30381	2,739	0
300	44366	2,934	44366	3,396	0
350	59265	3,67	59265	4,19	0

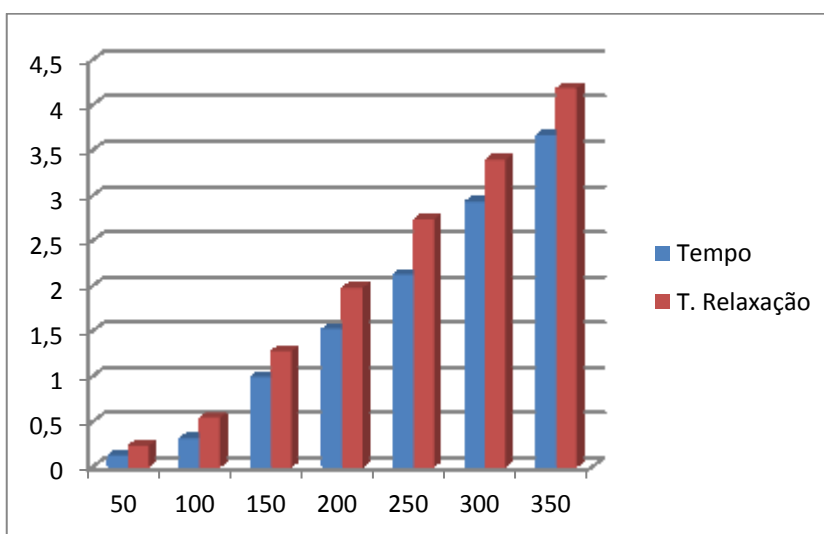


Gráfico 105 - Tempos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

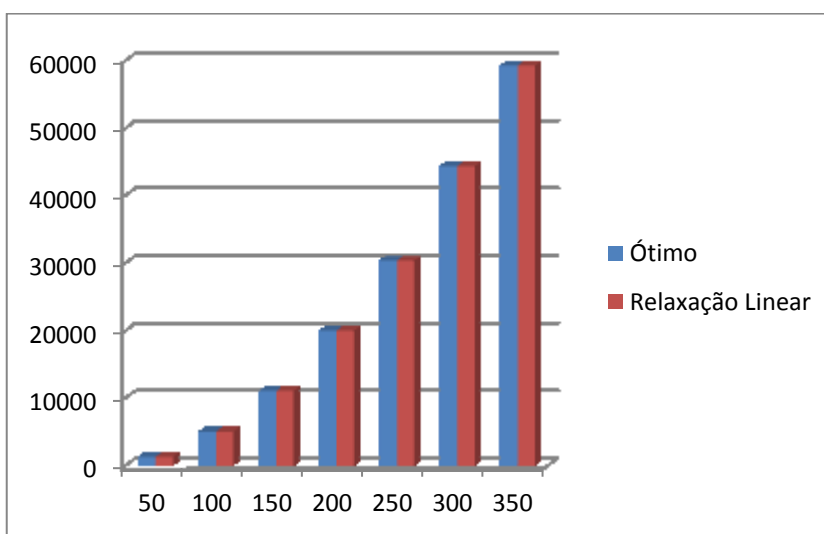


Gráfico 106 - Valores ótimos para 150 nós com caminhos a variar entre 50 e 350

Tabela 54 - Resultados para 200 nós usando o MRT3

200 nós					
Nº Caminhos	Ótimo		Relaxação Linear		GAP
	Valor	Tempo	Valor	Tempo	
50	1310	0,146	1310	0,289	0
100	4733	0,308	4733	0,604	0
150	11102	0,454	11102	0,939	0
200	19984	1,892	19984	2,295	0
250	31370	2,262	31370	3,059	0
300	44600	2,79	44600	3,398	0
350	61505	6,891	61505	7,608	0
400	81439	6,222	81439	7,002	0
500	119038	8,501	119038	9,508	0
600	160619	11,831	160619	13,072	0

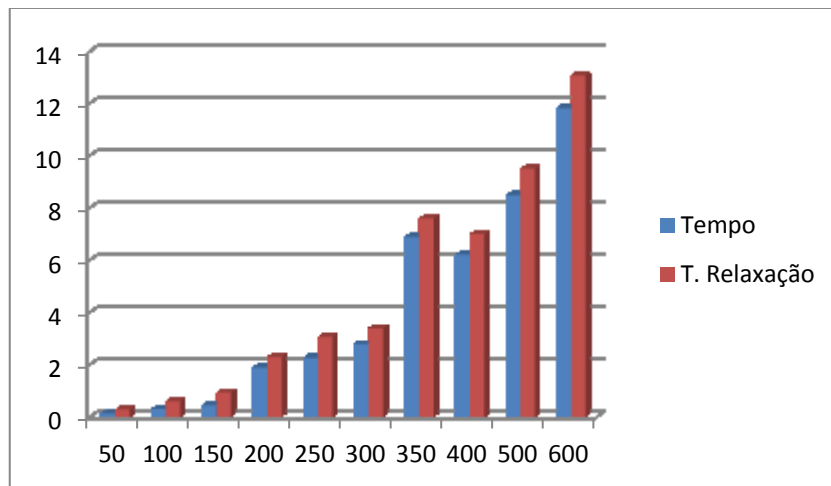


Gráfico 107- Tempos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600

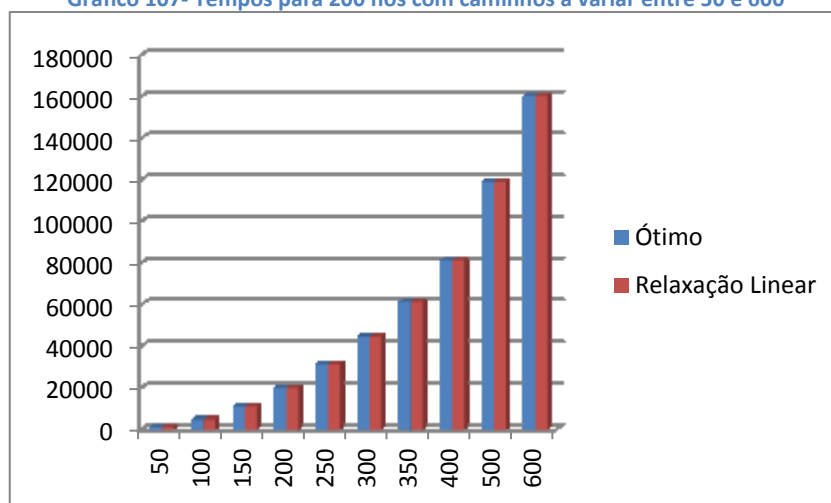


Gráfico 108 - Valores ótimos para 200 nós com caminhos a variar entre 50 e 600

Após verificação dos resultados, constatamos que o comportamento dos resultados obtidos foi um pouco diferente em algumas das instâncias tanto no modelo MRT1 como em MRT2. Tivemos algumas diferenças para a instância de 20 nós no modelo MRT1 para custos variáveis, em que teríamos de instalar no máximo 4 dispositivos de monitorização enquanto que em MRT2 para custos variáveis para a mesma instância precisaríamos no máximo 3 dispositivos de monitorização. Para a instância de 100 nós no modelo MRT1 teríamos de instalar no máximo 4 dispositivos de monitorização enquanto que no modelo MRT2 necessitaríamos de instalar no máximo 5 dispositivos de monitorização. Já para custos fixos teríamos para uma instância de 20 nós de instalar no modelo MRT1 no máximo 3 dispositivos de monitorização enquanto que para o modelo MRT2 já teríamos de instalar no máximo 4 dispositivos de monitorização. Para a instância de 60 nós temos mais uma diferença, no modelo MRT1 precisaríamos no máximo 3 dispositivos de monitorização ao contrário de no modelo MRT2 precisaríamos no máximo 4 dispositivos de monitorização. Outra diferença estaria na instância dos 100 nós em que no modelo MRT1 teríamos apenas de instalar no máximo 4 dispositivos de monitorização e no modelo MRT2 precisaríamos de instalar no máximo 5 dispositivos de monitorização.

Quando se limita o número de caminhos que os nós podem monitorizar os resultados alteram muito, pois restringimos para todos os nós um máximo de 2 caminhos que os nós podem monitorizar. Ou seja, um determinado monitor poderá monitorizar 1 ou 2 caminhos. Com esta condição torna-se difícil de encontrar uma solução admissível para algumas instâncias. Para 10 nós a partir de 10 caminhos já não é possível encontrar uma solução admissível, ou seja, para 10 caminhos teríamos de instalar 5 dispositivos de monitorização. Para a instância de 20 nós, só conseguimos encontrar solução admissível até aos 30 caminhos com a instalação de 19 dispositivos de monitorização. Para 60 nós conseguimos encontrar solução até aos 70 caminhos em que teríamos de instalar 39 dispositivos de monitorização. Para 70 nós no máximo conseguiríamos encontrar solução admissível até aos 100 caminhos com a instalação de 55 dispositivos de monitorização. Quanto à instância dos 100 nós, também havia uma limitação, conseguimos encontrar solução admissível até aos 150 caminhos em que teríamos de instalar 91 dispositivos de monitorização. Para a instância de 150 nós teríamos novamente uma limitação para

encontrar solução admissível, ou seja, apenas conseguiríamos encontrar solução até aos 200 caminhos com a instalação de 119 dispositivos de monitorização. Para 200 nós só conseguimos encontrar solução até aos 300 caminhos com a instalação de 176 dispositivos de monitorização. Na tentativa de tentar resolver esta questão de não encontrar solução admissível para algumas instâncias ainda fizemos o teste em que fixamos para todos os nós 3 caminhos, verifiquei que conseguiria encontrar solução, embora demorasse muito tempo para o conseguir. Quando os tempos começaram a ser demasiado longos não conclui os testes. Para algumas instâncias e para um número de caminhos mais elevado o tempo chegou a ser de 703 segundos mas que rapidamente aumentou demasiado, a ponto de o computador estar um dia inteiro ligado e a solução não ter sido encontrada.

Para o modelo MRT3 em que todos os nós são dispositivos de monitorização e o objetivo é o de maximizar a quantidade de fluxo que é monitorizado. Para este modelo MRT3 obteve-se sempre o valor ótimo através da relaxação linear.

6- Problema de localização de Monitores

Devemos começar por referir que até agora os caminhos eram conhecidos, ou seja, nós sabíamos de início o percurso do fluxo. Neste capítulo vamos considerar o problema em que esses caminhos são desconhecidos contudo o objetivo continua a ser o de monitorizar o fluxo na rede.

A simples instalação de dispositivos de monitorização em todos os nós da rede não é conveniente. É necessário desenhar e implementar estratégias ótimas para determinar a localização dos dispositivos, conseguindo assim um melhor fluxo de tráfego na rede com um custo mais baixo. Aqui iremos falar sobre o problema de localização de dispositivos de monitorização de forma a minimizar o número de monitores nos nós de uma rede, determinando o volume de fluxo em toda a rede.

A diferença deste problema para os problemas anteriores diz respeito aos caminhos. Ou seja, nos problemas anteriores os caminhos já eram conhecidos e apenas interessava monitorizar os caminhos com o menor custo possível. Neste problema, para além de instalarmos monitores também interessa a ligação entre os nós, pois também

tem um custo e pretende-se minimizar o custo de instalação dos monitores assim como o custo de ligação entre os nós.

Localização de monitores nos nós

Se os monitores estão localizados em todos os nós da rede, então todo o volume de fluxo na rede pode ser conhecido. Colocar monitores em todos os nós é irreal e incomportável, logo o problema será escolher o menor número de nós que consegue monitorizar toda a rede [1].

Dada uma rede $G = (V, A)$, o fluxo nos arcos contém subfluxos que são gerados e/ou absorvidos pelos diferentes pares origens/ destinos.

Podemos chamar nós de transferência se nenhum fluxo é gerado ou absorvido por ele, por outro lado chamamos centróides aos nós que podem produzir e absorver fluxo.

Seja $T \subseteq V$ o conjunto dos nós de transferência da rede e $C \subseteq V$ o conjunto dos nós centróides da rede, Então $T \cup C = V$ e $T \cap C = \emptyset$.

Considerando os coeficientes:

b_i – Custo associado à instalação do monitor no nó i

c_{ij} – Custo de ligação entre os nós i e j

m_{ij} – Capacidade máxima do arco entre os nós i e j

k_i – Nível máximo de fluxo no nó i sem monitorização

E as variáveis:

f_{ij} – Variável inteira que indica a quantidade de fluxo que circula de i para j

x_{ij} – Variável binária que define a utilização do arco que liga i a j

y_i – Variável binária que define se haverá sensor /monitor instalado no vértice i

Para cada $v \in T$, existe a seguinte restrição para conservação do fluxo:

$$\sum_{w \in V} f_{vw} - \sum_{w \in V} f_{wv} = 0, v \in T$$

Para cada Centróide $v \in C$ temos a seguinte restrição para a conservação do fluxo:

$$\sum_{w \in V} f_{vw} - \sum_{w \in V} f_{wv} = S_v, v \in C$$

Onde S_v é o balanço do fluxo em que indica se o nó produz ou absorve fluxo.

Formulação (LM) – Localização de monitores

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in V} b_i y_i \quad \text{LM1}$$

Sujeito a

$$\sum_{j \in V} f_{ij} - \sum_{j \in V} f_{ji} = S_i, \forall i \in V \quad \text{LM2}$$

$$f_{ij} \leq m_{ij} x_{ij}, \forall (i,j) \in A \quad \text{LM3}$$

$$\sum_{j \in V} f_{ij} \leq k_i + (M - k_i) y_i, \forall i \in V \quad \text{LM4}$$

$$\sum_{i \in V} x_{ik} \geq 1, \forall k \in V, S_k < 0 \quad \text{LM5}$$

$$\sum_{i \in V} x_{ki} \geq 1, \forall k \in V, S_k > 0 \quad \text{LM6}$$

$$\sum_{k \in V} y_k \geq 1 \quad \text{LM7}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{LM8}$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \text{LM9}$$

$$f_{ij} \geq 0 \quad \text{LM10}$$

Onde as variáveis x_{ij} e y_i são binárias (LM8 e LM9) e a variável f_{ij} é positiva (LM10).

A função objetivo LM1 tem como objetivo minimizar o custo de instalação dos dispositivos de monitorização assim como a ligação entre os nós.

A restrição LM2 assegura que o fluxo que sai menos o fluxo que entra num determinado nó i tem de ser igual ao que é produzido ou consumido pelo nó i .

A restrição LM3 de ligação entre as variáveis garante que apenas haja fluxo num arco (i,j) se este for incluído na solução e que a quantidade de fluxo nesse arco está limitada a um valor m_{ij} específico para cada arco $(i,j) \in A$.

A restrição LM4 garante que apenas é instalado um dispositivo de monitorização num nó $i \in V$ se a quantidade de fluxo que entra nesse nó for superior uma quantidade k_i específica para esse nó. A constante M é muito grande contudo pode ser obtida por $M = \sum_{j \in V | S_j > 0} S_j$

As restrições LM5 e LM6 garantem que pelo menos um arco seja utilizado.

A restrição LM7 garante que pelo menos um monitor é instalado.

Vamos apresentar de seguida um exemplo, considerando 12 cidades de Portugal em que os custos de ligação são as suas distâncias.

Cada nó representa uma cidade como mostramos de seguida:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Porto	Aveiro	Viseu	Lisboa	Évora	Beja	Faro	Vila Real	Castelo Branco	Setúbal	Coimbra	Braga

O objetivo será minimizar o custo de ligação entre duas cidades do país.

Apresentamos de seguida os custos de ligação entre os nós, os custos de instalação dos monitores nos nós, a capacidade máxima do arco e a capacidade de absorção ou produção de informação de determinado nó.

Custos de ligação de nós c:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	68	133	313	371	449	571	116	276	363	117	53
2	68	0	95	244	302	380	502	184	217	294	60	121
3	133	95	0	292	394	472	607	110	191	342	96	186
4	313	244	292	0	150	192	299	402	258	50	196	366
5	371	302	394	150	0	78	213	466	203	103	254	424
6	449	380	472	192	78	0	152	544	281	142	332	502
7	571	502	667	299	213	152	0	660	416	249	454	624
8	116	184	110	402	466	544	660	0	263	452	206	106
9	276	217	191	258	203	281	416	263	0	265	159	329
10	363	294	342	50	103	142	249	452	265	0	246	416
11	117	60	96	196	254	332	454	206	159	246	0	170
12	53	121	186	366	424	502	624	106	239	416	170	0

Para tornar mais fácil o problema consideramos que o custo de instalação de um monitor era igual em todos os nós.

Custo de instalação do monitor no nó i

$[b_i] = [10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10]$

O nível máximo de fluxo no nó i sem monitorização é dado da seguinte forma:

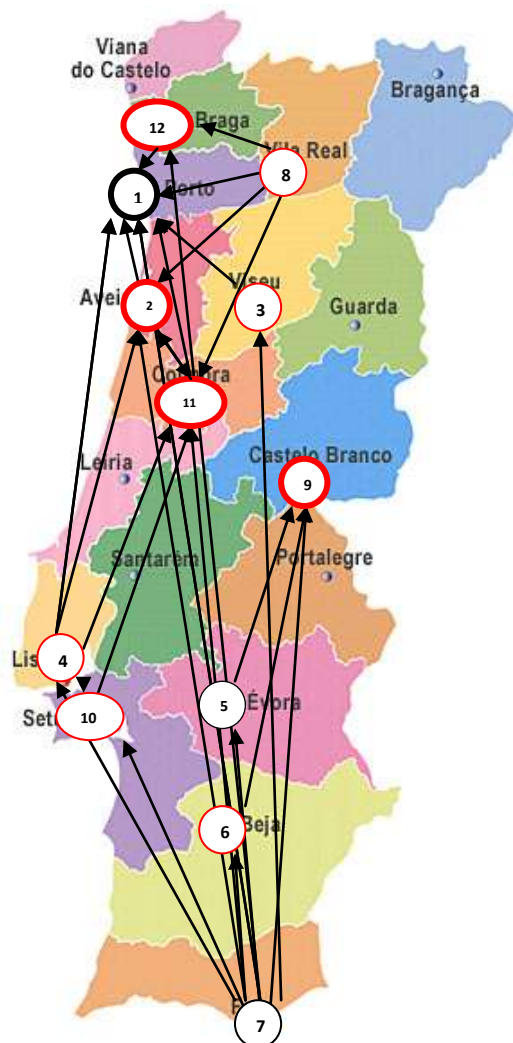
$[k_i] = [10 \ 20 \ 10 \ 70 \ 100 \ 10 \ 50 \ 10 \ 10 \ 60 \ 10 \ 10]$

A capacidade máxima m_{ij} dos arcos são todas iguais a 10.

De seguida é mostrada o vetor que indica a produção ou absorção de informação nos nós:

Nó	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S	-70	-30	0	30	0	0	100	40	-30	-10	-20	-10

Mostramos agora a solução do problema para este exemplo em que seriam instalados monitores nos nós 1, 2, 9, 11 e 12:



...

A matriz dos custos de instalação dos arcos continua igual e o vetor dos custos de instalação dos monitores também continua igual em todos os nós com um custo de 10. A capacidade máxima dos arcos continua 10.

Nó	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S	70	0	0	0	-10	0	-60	0	0	0	0	0



Está assinalado a negrito o nó em que seria instalado monitor e assinalados a vermelho aqueles nós que apenas são de transferência de informação, ou seja nem produzem nem absorvem informação.

Nó	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S	0	0	0	70	0	-40	0	-30	0	0	0	0

A map of Portugal is shown, divided into 12 regions, each represented by a different color. The regions are labeled with numbers 1 through 12, enclosed in circles. The regions are: 1 (Viana do Castelo), 2 (Braga), 3 (Guimarães), 4 (Porto), 5 (Aveiro), 6 (Coimbra), 7 (Leiria), 8 (Santarém), 9 (Castelo Branco), 10 (Setúbal), 11 (Beja), and 12 (Faro). Directed edges (arrows) connect the regions as follows: 1 to 8, 2 to 8, 3 to 8, 4 to 8, 4 to 11, 4 to 5, 4 to 6, 5 to 6, 6 to 7, 10 to 6, and 10 to 7. The regions are colored: 1 (pink), 2 (green), 3 (blue), 4 (orange), 5 (pink), 6 (green), 7 (blue), 8 (orange), 9 (blue), 10 (pink), 11 (green), and 12 (orange).

• • •
124

7- Conclusões

Neste trabalho, estudamos o problema da monitorização de redes que consistiu na melhor escolha de nós para a instalação de dispositivos que efetuassem a monitorização da rede. Começamos por apresentar a versão na qual os caminhos de fluxo da rede são conhecidos. Este problema pode ser considerado um problema de cobertura no qual o objetivo é cobrir todos os caminhos da rede por nós, que correspondem à localização dos dispositivos de monitorização. Foram também considerados duas variantes do problema em que a primeira impunha um limite na capacidade de monitorização de cada dispositivo e a outra variante considerava antes uma monitorização da quantidade de fluxo da rede (em vez dos caminhos).

Apresentámos uma formulação em programação linear inteira para cada variante e um estudo computacional onde os vários parâmetros (número de caminhos, número de nós, e custos de instalação) do problema variavam. Usando o software Xpress obtivemos soluções que nos permitiram avaliar a quantidade de dispositivos necessários em função do número de percursos ou quantidade de fluxo da rede. Apresentámos uma análise dos resultados

obtidos assim como algumas conclusões tendo em conta o tempo computacional e a qualidade da solução obtida através das relaxações lineares dos modelos apresentados.

No final considerámos a versão na qual os caminhos efetuados pelo fluxo na rede não são conhecidos. Apresentámos uma formulação em programação linear inteira para o problema e, usando o software Xpress, obtivemos soluções para alguns exemplos.

Na prática, a escolha de localizações para a instalação de monitores depende sempre do problema em causa. Um dos fatores é o custo, mas este não garante a escolha da localização “mais económica” pois existem outros fatores que devem também ser considerados.

Os modelos foram testados computacionalmente com instâncias de 10, 20, 30, 50, 60, 70, 100, 150 e 200 nós. Para cada caso, variámos o número de caminhos a monitorizar. Os valores de *gap* calculados permite-nos avaliar a qualidade das soluções obtidas.

Após verificação dos resultados, constatámos que o comportamento dos resultados obtidos foi um pouco diferente em algumas das instâncias tanto no modelo MRT1 como em MRT2. Fazendo a comparação do modelo MRT1 e MRT2 para custos variáveis e em que o limite m era variável constatámos que existem algumas diferenças no que diz respeito ao número de dispositivos a instalar para determinado número de caminhos a monitorizar. Para custos fixos e o limite m variável normalmente o número de dispositivos a monitorizar no modelo MRT1 era mais baixo do que no modelo MRT2.

No modelo MRT2 quando se limita o número de caminhos que os nós podem monitorizar para um máximo de 2 caminhos torna-se difícil de encontrar uma solução admissível. Para tentar resolver esta questão de não encontrar solução admissível para algumas instâncias ainda fizemos o teste em que fixamos para todos os nós 3 caminhos, verificámos que conseguiríamos encontrar solução, embora demorasse muito tempo para o conseguir.

No modelo MRT3 todos os nós podem ser dispositivos de monitorização e o objetivo é o de maximizar a quantidade de fluxo que é monitorizado.

Quanto à qualidade das soluções obtidas pelas relaxações lineares podemos verificar que esta vai diminuindo à medida que número de nós aumenta nos dois modelos MRT1, MRT2. O problema vai-se tornando mais complexo à medida que vamos aumentando o número de nós e o número de caminhos a monitorizar.

Quanto à versão em que os caminhos não eram conhecidos *à priori* podemos concluir que a instalação dos dispositivos de monitorização não depende só do custo de instalação do dispositivo mas também do custo de ligação entre os nós e da capacidade dos arcos. Neste problema a instalação dos dispositivos pode ocorrer tanto em nós centróides (nós que produzem ou absorvem fluxo) como em nós de transferência.

8 - Bibliografia

- [1] Lucio Bianco, Giuseppe Confessore, Monica Gentili, Combinatorial Aspects of the Sensor Location Problem, *Annals of operations Research*, vol. 144, 2006, pp. 201-234.
- [2] Marco Cesar Goldbarg, Henrique Pacca L. Luna, *Otimização Combinatória e programação Linear*, Campus, 2005.
- [3] Domingos Moreira Cardoso, Jersy Szymanski, Mohammad Rostami, *Matemática Discreta - Combinatória, Teoria dos Grafos e Algoritmos*, Aveiro, 2005.
- [4] Elia El-Darzi, Gautam Mitra, Graph Theoretic relaxations of set covering and set partitioning problems, *European Journal of Operational Research*, vol. 87, 1995, pp. 109-121.
- [5] Gendreau Michel, Laport Gilbert, Semet Frederic, The Covering Tour Problem, *Operations Research*, vol. 45, 1997, pp. 568-576.